

Apuntes de Fundamentos de Microondas 1
4º E.T.S.I. Telecomunicación
Universidad de Málaga

Carlos García Argos (garcia@ieee.org)
<http://www.telecos-malaga.com>

Curso 2002/2003

Índice general

1. Tecnología de Radiofrecuencia y Microondas	3
1.1. Introducción	3
1.1.1. ¿Qué son las microondas?	3
1.1.2. ¿Por qué hay que subir en frecuencia?	3
1.1.3. ¿Por qué nos resulta extraña la alta frecuencia?	4
1.1.4. ¿Qué pasa con los circuitos cuando se sube en frecuencia?	4
1.2. Componentes e interconexiones	5
2. Líneas de Transmisión	7
2.1. Resumen de la teoría de líneas de transmisión	7
2.1.1. Medios de transmisión con y sin pérdidas	8
2.1.2. Modos TEM	9
2.1.3. Modelado de una línea de transmisión	11
2.1.4. Línea sin pérdidas	14
2.1.5. Línea de bajas pérdidas	15
2.2. La línea de transmisión terminada	16
2.2.1. Introducción	16
2.2.2. Ondas de tensión y corriente	16
2.2.3. Coeficiente de reflexión	18
2.2.4. Impedancia vista	18
2.2.5. Relación entre impedancia vista y coeficiente de reflexión	22
2.2.6. Cálculo de potencias	22
2.2.7. Equivalente de Thevenin desde la salida	24
2.2.8. Diagrama de onda estacionaria	25
2.2.9. Coeficiente de onda estacionaria	29
2.2.10. Potencia transmitida a lo largo de la línea de transmisión	30
2.2.11. Atenuación de la línea de transmisión terminada	33
2.2.12. Potencia disipada en la línea de transmisión terminada	35

2.2.13. Interconexión de líneas de transmisión	37
2.2.14. Función de transferencia de la línea de transmisión terminada	38
2.3. La carta de Smith	41
2.3.1. Presentación	41
2.3.2. Construcción de la carta de Smith	43
2.3.3. Puntos característicos de la carta de Smith	44
2.3.4. Uso básico de la carta de Smith	45
2.3.5. Carta de Smith modificada	49
2.3.6. Carta de Smith y líneas de transmisión con pérdidas	49
2.3.7. Carta de Smith comprimida	50
2.4. La línea de transmisión como elemento de circuito	50
2.4.1. Línea corta	50
2.4.2. Tramos de línea de transmisión terminada	52
2.4.3. Transformador en $\lambda/4$	55
2.4.4. Ventana en $\lambda/2$	56
2.5. Características de las líneas de transmisión más comunes	57
2.5.1. El cable coaxial	57
2.5.2. La línea biplaca	59
2.5.3. Stripline	61
2.5.4. Microstrip	62
2.6. Aspectos prácticos de las líneas de transmisión	67
3. Transformación y adaptación de impedancias	69
3.1. Definición del problema	69
3.2. Clasificación del problema	70
3.3. Adaptación de impedancias reales en banda estrecha	72
3.3.1. Transformador en $\lambda/4$	72
3.3.2. Transformación reactiva de resistencias	74
3.4. Adaptación de impedancias complejas en banda estrecha	77
3.4.1. Transformador corto	78
3.4.2. Transformación reactiva de impedancias complejas	79
3.4.3. Adaptación con línea y <i>stub</i>	82
3.5. Adaptación de impedancias reales en banda ancha	84
3.5.1. Transformador en $\lambda/4$ multisección	84
3.5.2. <i>Tapers</i>	87

4. Ondas guiadas	89
4.1. Planteamiento del problema	89
4.2. Clasificación en modos	93
4.2.1. Modos TM	93
4.2.2. Modos TE	97
4.2.3. Resumen de los modos TM y TE	99
4.2.4. Características de propagación de los modos	100
4.2.5. Efectos de las pérdidas en el dieléctrico	106
4.3. La guía rectangular	107
4.3.1. Introducción	107
4.3.2. Modos TM	110
4.3.3. Modos TE	112
4.3.4. Modos dominante y superiores	114
4.3.5. Ejemplo de guía comercial estandarizada	117
4.3.6. Potencia transmitida por el modo fundamental	117
4.4. Atenuación debida a los conductores	120
4.4.1. Caso general	120
4.4.2. Guía rectangular	122
4.5. Varios modos propagándose por la guía	124
4.6. Cable coaxial	124
4.7. Guía circular	125
4.8. Guía ridge	126
4.9. Condiciones de contorno en las tapas	127
4.9.1. Ejemplo	128
5. Parámetros S	131
5.1. Introducción	131
5.2. Elemento de circuito a frecuencias de microondas	131
5.3. Ondas de potencia	133
5.4. Caracterización de un bpuerto en términos de ondas de potencia	136
5.4.1. Definición de los parámetros S en el bpuerto	138
5.4.2. Ejemplos	140
5.5. Propiedades de la matriz de parámetros S	142
5.5.1. Bpuerto sin pérdidas	142
5.5.2. Reciprocidad	142
5.5.3. Cambio de plano de referencia	143
5.5.4. Existencia de los parámetros S	144

5.6. Casos particulares	145
5.6.1. Bipuerto adaptado	145
5.6.2. Desfasador adaptado	145
5.6.3. Aislador adaptado	146
5.7. Matrices de transmisión en términos de ondas de potencia	146
A. Notas sobre unidades	A-I

Tecnología de Radiofrecuencia y Microondas

1.1 Introducción

Vamos a empezar respondiendo a unas cuantas preguntas que plantea la tecnología de microondas:

1.1.1 ¿Qué son las microondas?

Las microondas son ondas electromagnéticas cuyo espectro se encuentra en el rango de 300 MHz a 300 GHz . Dentro de ese intervalo, se definen 3 subintervalos:

- ⤷ Radiofrecuencia: de 300 MHz a 3 GHz
- ⤷ Microondas: de 3 GHz a 30 GHz
- ⤷ Milimétricas: de 30 GHz a 300 GHz

Estas frecuencias son tan elevadas que no se puede usar la Teoría de Circuitos, por lo que, rigurosamente, habría que aplicar la Teoría de Campos Electromagnéticos.

1.1.2 ¿Por qué hay que subir en frecuencia?

Hay varias razones que motivan usar frecuencias más elevadas:

- ⤷ **Saturación del espectro:** cada vez hay más servicios y más frecuencias usadas, por lo que se hace necesario buscar nuevas frecuencias para dar más servicios.
- ⤷ **Anchos de banda elevados:** los nuevos servicios solicitan anchos de banda cada vez mayores, difíciles de conseguir con las frecuencias normales de otros servicios.
- ⤷ **Focalización de la energía:** mejorar la resolución angular de las antenas haciéndolas más pequeñas, necesario para comunicaciones punto a punto y radar. En el radar se consigue mayor resolución cuanto mayor es la frecuencia. Por ejemplo, con una antena parabólica de 1 m de diámetro, a 1 GHz el radio de un rayo es de 50° , mientras que a 10 GHz es de 5° , por lo que a la hora de transmitir entre dos puntos es más eficiente, y si se trata de un radar, tiene más resolución.

- ⤷ **LOS** (*Line Of Sight*, Visibilidad Directa): radioenlaces punto a punto (satélite, servicio fijo)
- ⤷ **Mecanismos interesantes:** por ejemplo, a 60 GHz hay un pico de absorción en la atmósfera muy grande, lo que puede servir para servicios a muy cortas distancias con un grado de privacidad relativamente elevado. Se puede usar por ejemplo en redes locales inalámbricas. Existen varios picos de absorción, entre los cuales se encuentran las llamadas ventanas de transmisión.

1.1.3 ¿Por qué nos resulta extraña la alta frecuencia?

Hasta hace relativamente poco tiempo no se han desarrollado aplicaciones para altas frecuencias.

Empezaron en la II Guerra Mundial con los radares, continuando más adelante con sistemas de comunicaciones.

En la actualidad, hay más aplicaciones, por ejemplo:

- ⤷ Telefonía móvil
- ⤷ Televisión por satélite: ya que las microondas no se curvan en la ionosfera, por lo que pueden atravesar la atmósfera
- ⤷ Redes de Área Local Inalámbricas (*Wireless LAN*, o WLAN)
- ⤷ Automoción: radares de la Guardia Civil, detectores de colisiones, etc.
- ⤷ Aplicaciones domésticas: horno microondas (2.45 GHz)
- ⤷ Aplicaciones industriales: secado (granos de café, tejidos, ...)
- ⤷ Aplicaciones médicas: aplicar calor localizado (lesiones musculares), cáncer, ...
- ⤷ Radioastronomía: detección de radiación

1.1.4 ¿Qué pasa con los circuitos cuando se sube en frecuencia?

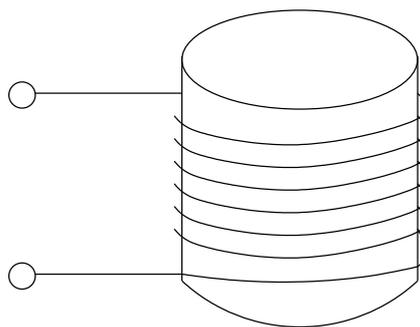


Figura 1.1: Bobina (real)

El incremento de la frecuencia en los circuitos hace que se manifiesten efectos que afectan a su funcionamiento:

- ⤷ Efectos de **propagación**: no es válida la Teoría de Circuitos, al ser el tamaño comparable a la longitud de onda
- ⤷ Efectos de **radiación**
- ⤷ Efectos **parásitos**, ya que los componentes no se pueden considerar ideales

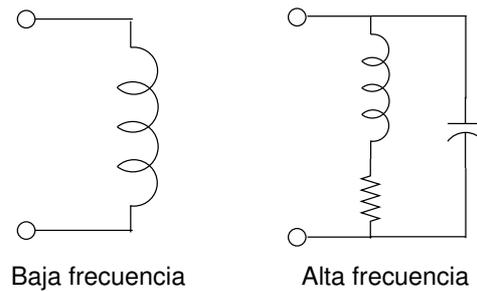


Figura 1.2: Inductor ideal y modelo para altas frecuencias

- ⤷ Efecto **pelicular**: la corriente circula sólo por la superficie de los conductores, incrementándose su resistividad
- ⤷ Al incorporar los elementos a un circuito, interactúa con los otros elementos al decrecer el campo en función de $1/r$ en lugar de $1/r^2$ como decrece a bajas frecuencias

En la figura (1.1) vemos el esquema de una bobina real y en la (1.2) vemos los modelos para bajas y altas frecuencias. En **baja frecuencia** tenemos una definición unívoca de tensión y corriente, además de haber confinamiento natural de los elementos.

En cambio, cuando hay **alta frecuencia**, la tensión y la corriente no tienen sentido físico.

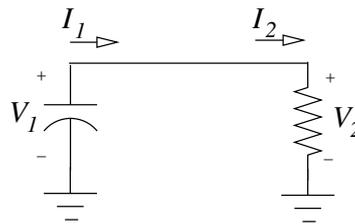


Figura 1.3: Ejemplo del efecto de propagación a altas frecuencias: $I_1 \neq I_2$ y $V_1 \neq V_2$

A la hora de tratar con las altas frecuencias podemos dar dos **enfoques**:

- ⤷ disminuir el tamaño de los elementos, para que se siga cumpliendo la Teoría de Circuitos. Es una técnica limitada y poco profesional
- ⤷ abandonar el modelo de parámetros concentrados y convivir con los efectos. Es la orientación más “profesional”

1.2 Componentes e interconexiones

Dentro de los **componentes**, tenemos los *pasivos* y los *activos*:

- ⤷ Los **activos** son los que se realizan físicamente con dispositivos semiconductores.
- ⤷ Los **pasivos** se pueden realizar de dos formas: con elementos concentrados (dimensiones mucho menores que la longitud de onda) o elementos distribuidos (dimensiones comparables a la longitud de onda)

Nota. En esta asignatura sólo vamos a tratar con *elementos pasivos*

Para las **interconexiones**, se habla de *líneas de transmisión* y de *guías de onda*.

Hablando de los **conductores**, sabemos que las pérdidas de un conductor son proporcionales a la relación $\frac{\text{perímetro}}{\text{área}}$, razón por la cual una guía de onda cilíndrica tiene menos pérdidas que una rectangular.

Son más comunes las técnicas de guía de onda, al ser más precisas que la tecnología planar, que se usa para circuitos integrados de microondas (**MIC**: *Microwave Integrated Circuit*). Dentro de los MIC encontramos 2 tipos:

- **HMIC**: *Hybrid MIC* (Híbridos), los que están fabricados a partir de un sustrato dieléctrico y los elementos de circuito se sueldan al sustrato (en especial los elementos activos)
- **MMIC**: *Monolithic MIC* (Monolíticos), los que están formados por un sustrato semiconductor sobre el que se depositan los materiales para formar todo el circuito.

Líneas de Transmisión

2.1 Resumen de la teoría de líneas de transmisión

El concepto de **línea de transmisión** está asociado a la propagación de *modos TEM* en estructuras con dos conductores, de sección transversal arbitraria (figura (2.1)) y con simetría transversal. Consideraremos en un principio conductores perfectos (sin pérdidas).

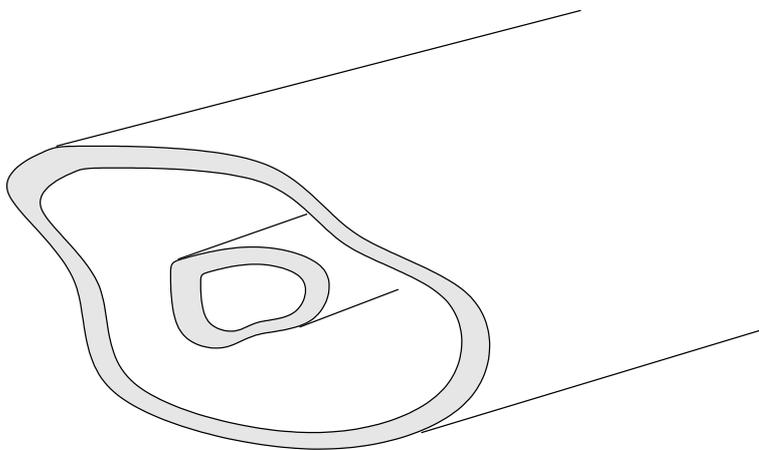


Figura 2.1: Ejemplo de línea de transmisión con sección transversal arbitraria

Recordamos de Electromagnetismo II que hay distintos modos de propagación, que corresponden a varios tipos de soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Estos modos son:

- ▷ **TEM:** Transversal Electromagnético, en el cual los campos no tienen componente en la dirección de invarianza de las condiciones de contorno:

$$H_z = E_z = 0$$

- ▷ **TE:** Transversal Elctrico, donde sólo el campo eléctrico no tiene componente en la dirección de invarianza de las condiciones de contorno:

$$E_z = 0, H_z \neq 0$$

⇒ **TM**: Transversal Magnético, donde es el campo magnético el que no tiene componente en la dirección de invarianza de las condiciones de contorno:

$$H_z = 0, E_z \neq 0$$

Los modos TEM se pueden propagar a cualquier frecuencia (teóricamente), mientras que los modos TE y TM tienen frecuencias de corte inferiores (son soluciones paso alto). En realidad, los modos TEM permiten transmitir energía desde frecuencia cero hasta la frecuencia de corte del siguiente modo que sea solución del problema. Cuando se propagan varios modos en un medio, hay distintas constantes de propagación para cada modo, por lo que se produce dispersión, razón por la que es práctico trabajar con frecuencias inferiores a las de corte de los modos superiores.

Cuando no se propaga un modo a través de una estructura se dice que está **al corte**.

Los modos TEM necesitan para propagarse de la existencia de **dos conductores independientes o más**, que no tengan contacto eléctrico. Además, permiten transmitir energía sin distorsión.

En este tema trataremos con los modos TEM, mientras que en el 4 trabajaremos con los modos TE y TM.

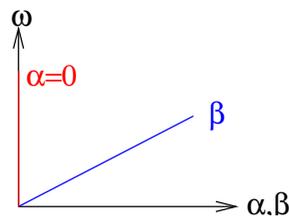


Figura 2.2: Diagrama de dispersión para un dieléctrico sin pérdidas

2.1.1 Medios de transmisión con y sin pérdidas

2.1.1.1 Dieléctrico sin pérdidas

En un dieléctrico sin pérdidas, μ y ε son números reales, por lo que los parámetros son:

$$\gamma_0 = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta$$

$$\eta_r = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

A β se le llama **constante de fase**, y a η **impedancia intrínseca** (en este caso, η_r , la componente real).

En la figura (2.2) vemos el diagrama de dispersión para este tipo de dieléctrico.

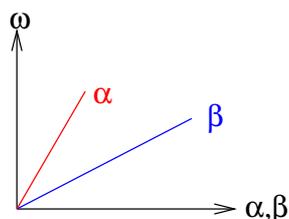


Figura 2.3: Diagrama de dispersión para un dieléctrico con pocas pérdidas

2.1.1.2 Buen dieléctrico (con pérdidas)

Un buen dieléctrico es aquel que cumple

$$\operatorname{tg} \delta \ll 1$$

En este caso, ε es complejo:

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

y la constante de propagación tiene una componente de pérdidas (α)

$$\boxed{\begin{aligned} \beta &\simeq \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} \\ \alpha &\simeq \beta \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta}{2} \end{aligned}} \quad (2.1)$$

Donde

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Recordemos que

$$\boxed{\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}}{\varepsilon'}} \quad (2.2)$$

es el **factor de pérdidas eléctricas** (o tangente de pérdidas).

Para la impedancia intrínseca también hay una componente real y otra imaginaria:

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_r &\simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \\ \eta_i &\simeq \eta_r \frac{\operatorname{tg} \delta}{2} \end{aligned}} \quad (2.3)$$

En la figura (2.3) podemos observar el diagrama de dispersión para el caso de un dieléctrico con pocas pérdidas.

2.1.2 Modos TEM

2.1.2.1 Solución de las ecuaciones de Maxwell

Los campos en los modos TEM, que se encuentran resolviendo las ecuaciones de Maxwell para el caso particular antes mencionado, son:

$$\boxed{\vec{E}_t(u_1, u_2, z) = \vec{F}_{E_t}(u_1, u_2) e^{\mp \gamma_0 z}} \quad (2.4)$$

$$\boxed{\vec{H}_t(u_1, u_2, z) = \frac{\pm \hat{z} \times \vec{E}_t}{\eta}} \quad (2.5)$$

Los parámetros que encontramos son:

⇒ Constante de propagación

$$\boxed{\gamma_0 = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon}} \quad (2.6)$$

depende sólo de la frecuencia y del medio, no de la geometría del sistema, por lo que las características de propagación no dependen de la geometría.

⇒ Impedancia intrínseca del medio

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \quad (2.7)$$

Estas expresiones recuerdan a las ondas planas, siendo la propagación sólo transversal, variando como $e^{\gamma_0 z}$ y los campos magnético y eléctrico directamente proporcionales a η . La única diferencia es que la amplitud de campo varía con las coordenadas (u_1, u_2) .

Para encontrar el campo $\vec{F}_{E_t}(u_1, u_2)$, nos limitamos a resolver el siguiente problema electrostático en 2 dimensiones (región sin fuentes):

$$\begin{cases} \nabla_t \cdot \vec{F}_{E_t}(u_1, u_2) = 0 \\ \nabla_t \times \vec{F}_{E_t}(u_1, u_2) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Así que hemos reducido el problema de calcular un campo electrodinámico en 3 dimensiones a calcular un problema electrostático en 2 dimensiones.

Estas expresiones nos llevan a

$$\Delta_t \phi(u_1, u_2) = 0$$

ya que se cumple

$$\vec{F}_{E_t}(u_1, u_2) = -\nabla_t \phi(u_1, u_2)$$

al ser \vec{F}_{E_t} irrotacional. El campo por tanto es tangencial al conductor:

$$\hat{n} \times \vec{E}_t|_C = 0 \Rightarrow \phi(u_1, u_2)|_C = cte$$

Por tanto, hay que calcular la capacidad electrostática de la sección transversal.

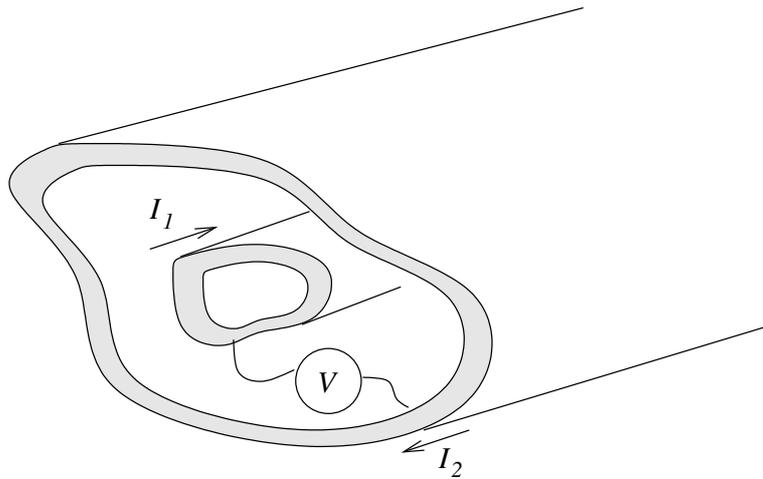


Figura 2.4: Corte transversal de una línea de transmisión

En una estructura de este tipo se pueden definir la tensión y la corriente de forma unívoca, siempre que las consideremos en un solo plano $z = cte$, como se puede ver en el corte de la figura (2.4). Además, en este caso, la corriente que circula por un conductor es igual que la que circula por el otro en sentido opuesto: $I_1 = I_2$.

2.1.2.2 Ondas de tensión y corriente

Se definen las ondas de tensión y corriente de la siguiente forma:

$$\begin{cases} V(z) = V_0 e^{-\gamma_0 z} \\ I(z) = I_0 e^{-\gamma_0 z} \end{cases} \quad (2.9)$$

A partir de estas ondas de tensión, se define la **impedancia característica de la línea de transmisión** como

$$Z_0 = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0}{I_0} = \eta \cdot k \tag{2.10}$$

Donde K es un parámetro dependiente de la geometría de la sección de línea de transmisión.

Por ejemplo, para un cable coaxial de radio del conductor interior a y del conductor exterior b ,

$$k = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi}$$

2.1.3 Modelado de una línea de transmisión

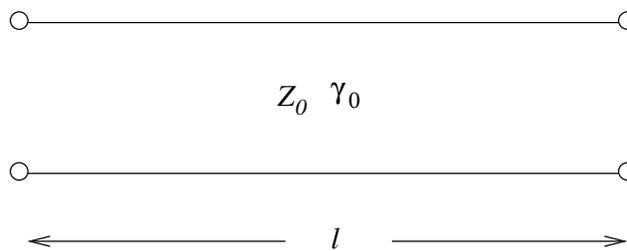


Figura 2.5: Símbolo de la línea de transmisión

Una línea de transmisión se representa con el símbolo de la figura (2.5), y queda totalmente caracterizada por su impedancia intrínseca (Z_0), su constante de propagación (γ_0) y su longitud (l).

Vamos a manejar magnitudes escalares, que sólo dependen de la coordenada z . Además, trabajaremos con las leyes de Kirchhoff.

El símbolo de la figura (2.5) es un elemento de parámetros distribuidos, en el que se ponen de manifiesto los fenómenos de propagación de ondas. En la línea de transmisión se producen conjuntamente los fenómenos de disipación y almacenamiento de energía. Esto se refleja en las siguientes ecuaciones, que incluyen las ondas reflejadas (propagándose en sentido contrario):

$$\begin{aligned} V(z) &= V_0^+ e^{-\gamma_0 z} + V_0^- e^{\gamma_0 z} \\ I(z) &= I_0^+ e^{-\gamma_0 z} - I_0^- e^{\gamma_0 z} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Donde se ha escrito $-I_0^-$ para reflejar el sentido contrario de la onda de corriente reflejada.



Figura 2.6: Modelado de una línea de transmisión como bipuerto

Un paso más en la descripción circuital de la línea de transmisión es caracterizarla como un **bipuerto**. Podemos ver el esquema en la figura (2.6), y las condiciones que debe cumplir el bipuerto son:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(z=0) & V_2 &= V(z=l) \\ I_1 &= I(z=0) & I_2 &= -I(z=l) \end{aligned}$$

Los parámetros z para este bipuerto serán

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

Que para el caso de la línea de transmisión, usando las fórmulas de las ondas de tensión y corriente, se obtiene:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_{22} = Z_0 \frac{\cosh \gamma_0 l}{\sinh \gamma_0 l} \\ Z_{21} &= Z_{12} = \frac{Z_0}{\sinh \gamma_0 l} \end{aligned}$$

Se trata de un bipuerto recíproco y simétrico, por lo que podemos establecer un circuito equivalente en T o en II. En la figura (2.7) se puede ver un circuito equivalente en T.

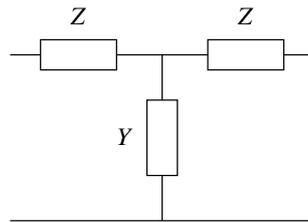


Figura 2.7: Circuito equivalente en T para una línea de transmisión

Para este equivalente, los valores de Z y Y son

$$\begin{aligned} Z &= \frac{Z_0}{\sinh \gamma_0 l} (\cosh \gamma_0 l - 1) \\ Y &= \frac{\sinh \gamma_0 l}{Z_0} \end{aligned}$$

Este equivalente no se puede representar con un número finito de elementos concentrados, por lo que no existe un circuito equivalente con resistencias, condensadores y bobinas que sea válido.

Ahora vamos a hacer la primera **aproximación** (hasta ahora no hemos hecho ninguna): consideramos que el tamaño de la línea es mucho menor que la menor longitud de onda del sistema. En este caso, sería válida la teoría de circuitos.

Además, como $\gamma_0 l \ll 1$, podemos aproximar con desarrollos de Taylor y quedarnos con los primeros términos, de forma que Z aproxima a una inductancia L y Y lo hace a una capacidad C en paralelo con una admitancia G . El circuito resultante se ve en la figura (2.8).

Si no se cumple $l \ll \lambda$, hay que poner infinitas secciones como la de la figura (2.8). Los valores de los componentes son:

$$\begin{aligned} Z &\simeq j\omega\mu k \frac{l}{2} \\ Y &\simeq j\omega \frac{\epsilon'}{k} l + \frac{\omega\epsilon''}{k} l \end{aligned}$$

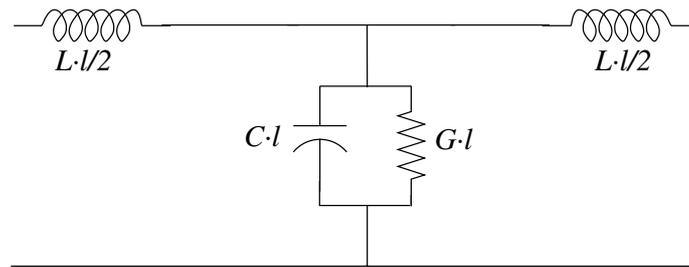


Figura 2.8: Equivalente en T de una sección de línea de transmisión

De donde se obtienen los **parámetros primarios**:

$$\begin{aligned} L &= \mu k \\ C &= \frac{\epsilon'}{k} \\ G &= \frac{\omega \epsilon''}{k} \end{aligned} \quad (2.12)$$

- ⇒ L mide la inductancia de los conductores por unidad de longitud (H/m)
- ⇒ C la capacidad producida por la proximidad de ambos conductores por unidad de longitud (F/m)
- ⇒ G representa las pérdidas que se producen en el dieléctrico que separa ambos conductores por unidad de longitud (S/m)

Los **parámetros secundarios** son los que antes hemos tomado como parámetros característicos de la línea, que se pueden escribir en función de los parámetros primarios, de forma exacta:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{j\omega L}{G + j\omega C}} \\ \gamma_0 &= \sqrt{j\omega L (G + j\omega C)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para estos cálculos hemos supuesto conductores perfectos ($\sigma = \infty$), por lo que no hay pérdidas en los conductores. Sin embargo, esto no es cierto en la realidad, por ejemplo, el mejor conductor (la plata) tiene $\sigma = 6.12 \cdot 10^7 S/m$ (el *Siemen* es la unidad de conductividad, también expresada como *mho* o \bar{U} , que es *ohm* al revés).

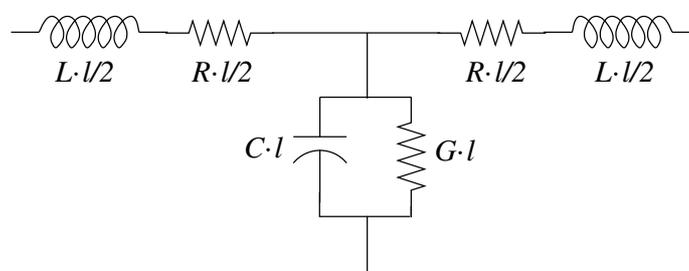


Figura 2.9: Equivalente de una sección de línea de transmisión con pérdidas en los conductores

Si bien las pérdidas producidas por la conductividad finita de los conductores empleados en la práctica son pequeñas, es de interés el estudio de esas pérdidas. Sobre todo para tratar el problema de la atenuación de una línea de transmisión o el Q de una cavidad resonante.

Cuando la conductividad es finita, el campo eléctrico deja de ser transversal, por lo que ya no se puede hablar de modos TEM. Como consecuencia, el vector de Poynting no es longitudinal y aparece una componente perpendicular al conductor. Las pérdidas se reflejarán en la constante de propagación γ , apareciendo una nueva componente de pérdidas, α_c , la constante de atenuación debida a los conductores, mientras que antes sólo aparecían las pérdidas debidas al dieléctrico.

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon + \alpha_c}$$

Se puede verificar que queda el circuito de la figura (2.9) y que el valor de R es

$$\boxed{R \simeq 2\alpha_c \Re(Z_0)} \quad (2.14)$$

Que se mide en Ω/m .

Y los parámetros secundarios se transforman en

$$\boxed{\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}} \\ \gamma_0 &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \end{aligned}} \quad (2.15)$$

El parámetro α_c se calcula como

$$\alpha_c = \frac{W_{pc}(z)}{2W_T(z)}$$

siendo $W_{pc}(z)$ la energía perdida en los conductores y $W_T(z)$ la transmitida en la línea de transmisión. Para calcular esas energías, en primer lugar se consideran los conductores ideales, y se calcula \vec{H}_t , obteniendo $W_{pc}(z)$ con ese \vec{H}_t :

$$W_{pc}(z) = \frac{1}{2\sigma\delta} \int_{C_1+C_2} \vec{H}_t \cdot \vec{H}_t^* dl$$

donde C_1 y C_2 son los caminos de ambos conductores. Por otro lado, la energía que se transmite es

$$W_T = \frac{1}{2} \Re(V(z) \cdot I^*(z)) = \frac{1}{2} \Re(V_0 \cdot I_0^*) \cdot e^{-2\alpha_c z}$$

2.1.4 Línea sin pérdidas

El caso de línea sin pérdidas es aquel en el que las pérdidas debidas al dieléctrico y a los conductores son nulas, es decir, que no hay constante de atenuación.

$$R = G = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

En este caso, los parámetros secundarios se convierten en los siguientes:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.16)$$

$$\gamma_0 = j\omega\sqrt{LC} = j\beta \quad (2.17)$$

Se observa que la constante de fase, β , es lineal con la frecuencia, por lo que no hay retardo de fase en una línea sin pérdidas

2.1.5 Línea de bajas pérdidas

En el caso de una línea de bajas pérdidas lo que se tiene es que la frecuencia es suficientemente alta como para cumplir

$$\begin{aligned} R &\ll \omega L \\ G &\ll \omega C \end{aligned}$$

lo cual es bastante normal a frecuencias de microondas. En este caso se pueden aproximar los parámetros primarios como vamos a ver a continuación:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{R}{j\omega L}}{1 + \frac{G}{j\omega C}}} \\ &= \left(\sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)^{-1/2} \right) \end{aligned}$$

En la última expresión, $\frac{R}{j\omega L} \ll 1$ y $\frac{G}{j\omega C} \ll 1$. Si usamos las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{1/2} \Big|_{x \rightarrow 0} &\simeq 1 + \frac{1}{2}x \\ (1 + x)^{-1/2} \Big|_{x \rightarrow 0} &\simeq 1 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Entonces, la expresión para la impedancia característica se convierte en

$$\begin{aligned} Z_0 &\simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{j\omega L}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{G}{j\omega C}\right) \\ &= \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{j\omega L} - \frac{G}{j\omega C}\right) + \frac{j}{4} \frac{RG}{\omega^2 LC}\right) \end{aligned}$$

Es claro que $\frac{RG}{\omega^2 LC} \rightarrow 0$ y que $\frac{R}{j\omega L} - \frac{G}{j\omega C} \rightarrow 0$, por lo que tenemos

$$Z_0 \simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.18)$$

Para la constante de propagación lo que tenemos es:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \\ &= j\omega\sqrt{LC} \sqrt{\left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right) \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)} \\ &\simeq j\omega\sqrt{LC} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{j\omega L}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{G}{j\omega C}\right) \\ &= j\omega\sqrt{LC} \left(1 - \frac{j}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C}\right) - \frac{j}{4} \frac{RG}{\omega^2 LC}\right) \\ &\simeq j\omega\sqrt{LC} + \frac{\omega\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right) \end{aligned}$$

Al final obtenemos la siguiente aproximación:

$$\gamma_0 \simeq j\omega\sqrt{LC} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} + \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (2.19)$$

Por lo que tenemos parte real e imaginaria de la constante de propagación, que son:

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$\alpha = \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} + \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \underbrace{\frac{G}{2}Z_0}_{\alpha_d} + \underbrace{\frac{R}{2Z_0}}_{\alpha_c}$$

Observamos que α_d no depende de la geometría, mientras que sí depende α_c .

Podemos definir por tanto una **línea de bajas pérdidas** como aquella que cumple:

- ▷ su constante de fase es lineal con la frecuencia
- ▷ su constante de atenuación es independiente de la frecuencia y además, constante
- ▷ su impedancia característica es real

2.2 La línea de transmisión terminada

2.2.1 Introducción

A lo largo del análisis de la línea de transmisión terminada vamos a suponer que trabajamos en régimen permanente sinusoidal para simplificarlo. En la figura (2.10) vemos el esquema de una línea de transmisión terminada en una impedancia genérica Z_L . Vamos a hacer los cálculos para este esquema.

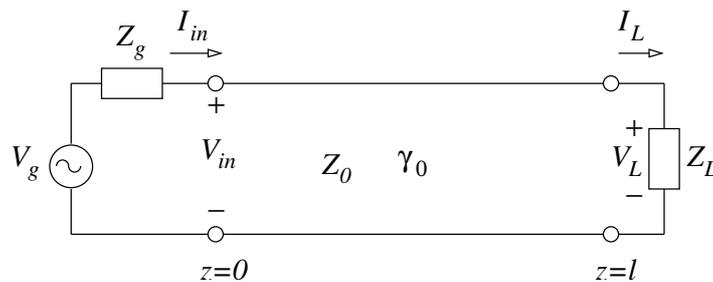


Figura 2.10: Línea de transmisión terminada en Z_L

2.2.2 Ondas de tensión y corriente

Las ondas de tensión y corriente son:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma_0 z} + V_0^- e^{\gamma_0 z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} (V_0^+ e^{-\gamma_0 z} - V_0^- e^{\gamma_0 z})$$

Tanto V_0^+ como V_0^- dependen del generador V_g y de la carga Z_L .

La condición de contorno en la carga es

$$V_L = Z_L I_L$$

Y las condiciones de contorno de la línea son:

$$\begin{aligned} V_{in} &= V(z=0) & I_{in} &= I(z=0) \\ V_L &= V(z=l) & I_L &= I(z=l) \end{aligned}$$

Haciendo uso de la condición de contorno de la carga, tenemos

$$\begin{aligned} Z_L I_L &= V_0^+ e^{-\gamma_0 l} + V_0^- e^{\gamma_0 l} \\ &= Z_L \frac{1}{Z_0} (V_0^+ e^{-\gamma_0 l} - V_0^- e^{\gamma_0 l}) \\ V_0^- e^{\gamma_0 l} \left(1 + \frac{Z_L}{Z_0}\right) &= V_0^+ e^{-\gamma_0 l} \left(\frac{Z_L}{Z_0} - 1\right) \end{aligned}$$

De donde se obtiene la siguiente relación entre V_0^- y V_0^+ :

$$\boxed{V_0^- = V_0^+ e^{-2\gamma_0 l} \left(\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right)} \quad (2.20)$$

Si $Z_0 = Z_L$, entonces $V_0^- = 0$, lo que significa que no hay onda reflejada, y eso equivale a una línea indefinida. La impedancia que ve el generador es la característica de la línea, $Z_{in} = Z_0$.

Como condición de contorno en el generador tenemos

$$\begin{aligned} V_g &= Z_g I_{in} + V_{in} = Z_g \frac{1}{Z_0} (V_0^+ - V_0^-) + V_0^+ + V_0^- \\ &= V_0^+ \left(\frac{Z_g}{Z_0} + 1\right) + V_0^- \left(1 - \frac{Z_g}{Z_0}\right) \end{aligned}$$

Introduciendo el valor de V_0^- calculado en (2.20), obtenemos:

$$V_g = V_0^+ \left(1 + \frac{Z_g}{Z_0} + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma_0 l} \left(1 - \frac{Z_g}{Z_0}\right)\right) \quad (2.21)$$

Y tras operar convenientemente tenemos el valor de V_0^+ :

$$\boxed{V_0^+ = V_g \frac{Z_0 (Z_L + Z_0)}{(Z_g + Z_0)(Z_L + Z_0) + e^{-2\gamma_0 l} (Z_0 - Z_g)(Z_L - Z_0)}} \quad (2.22)$$

Nos paramos a ver dos casos particulares:

- ⊃ $Z_g = Z_0$: $V_0^+ = \frac{V_g}{2}$. En este caso hay onda reflejada
- ⊃ $Z_L = Z_0$: $V_0^+ = V_g \frac{Z_0}{Z_g + Z_0}$. En este caso no hay onda reflejada, la impedancia que ve el generador es Z_0 y la tensión incidente es la resultante del divisor de tensión entre Z_g y Z_0

2.2.3 Coeficiente de reflexión

Se define como la relación entre el campo reflejado y el incidente, o en nuestro caso, la relación entre la onda de tensión (o corriente) reflejada y la incidente:

$$\rho(z) = \frac{V_0^-}{V_0^+} e^{2\gamma_0 z} \quad (2.23)$$

Definimos el **coeficiente de reflexión en la carga** de la siguiente forma:

$$\rho_L = \rho(z=l) = \frac{V_0^-}{V_0^+} e^{2\gamma_0 l} \quad (2.24)$$

Y podemos obtener una expresión para ese coeficiente de reflexión en la carga en función de las impedancias de carga y característica de la línea, usando la ecuación (2.20), ya que

$$V_0^- = V_0^+ \rho_L e^{-2\gamma_0 l}$$

y por tanto se tiene que

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (2.25)$$

Además podemos escribir el coeficiente de reflexión de la línea en función del coeficiente de reflexión en la carga:

$$\rho(z) = \rho_L e^{2\gamma_0(z-l)}$$

A partir de ahora tomaremos el origen al final de la línea, como refleja la ecuación anterior. La podemos reescribir para d :

$$\rho(d) = \rho_L e^{-2\gamma_0 d} \quad (2.26)$$

Además de los coeficientes de reflexión antes descritos, podemos todavía definir uno más: el **coeficiente de reflexión a la entrada**:

$$\rho_{in} = \rho(d=l) = \rho_L e^{-2\gamma_0 l} \quad (2.27)$$

Y también podemos separar el coeficiente de reflexión de la línea en su módulo y su argumento:

$$\begin{aligned} \rho(d) &= |\rho_L| e^{j\phi_L} e^{-2\alpha d} e^{-j\beta d} \\ &= \left(|\rho_L| e^{-2\alpha d} \right)_{\phi_L - 2\beta d} \end{aligned}$$

2.2.4 Impedancia vista

2.2.4.1 Definición

Se define la impedancia como $Z = \frac{\bar{V}}{I}$. Para una línea de transmisión se usan las ondas de tensión y corriente en cada punto de la línea:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$$

Esta es la impedancia vista, la impedancia que se puede “ver” en cada punto de la línea de transmisión.

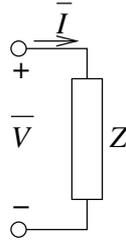


Figura 2.11: Definición de impedancia

Que, usando las expresiones de dichas ondas, se transforma en:

$$\begin{aligned}
 Z(z) &= \frac{V_0^+ e^{\gamma_0 z} + V_0^- e^{\gamma_0 z}}{\frac{1}{Z_0} (V_0^+ e^{-\gamma_0 z} - V_0^- e^{\gamma_0 z})} \\
 &= Z_0 \frac{V_0^+ \left(e^{-\gamma_0 z} + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma_0 l} e^{\gamma_0 z} \right)}{V_0^+ \left(e^{-\gamma_0 z} - \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-\gamma_0 l} e^{\gamma_0 z} \right)} \\
 &= Z_0 \frac{(Z_L + Z_0) e^{-\gamma_0 z} + (Z_L - Z_0) e^{-\gamma_0 l} e^{\gamma_0 z}}{(Z_L + Z_0) e^{-\gamma_0 z} - (Z_L - Z_0) e^{-2\gamma_0 l} e^{\gamma_0 z}} \\
 &= Z_0 \frac{Z_L (e^{-\gamma_0(z-l)} + e^{\gamma_0(z-l)}) + Z_0 (e^{-\gamma_0(z-l)} - e^{\gamma_0(z-l)})}{Z_L (e^{-\gamma_0(z-l)} - e^{\gamma_0(z-l)}) + Z_0 (e^{-\gamma_0(z-l)} + e^{\gamma_0(z-l)})}
 \end{aligned}$$

Que, usando las expresiones de senos y cosenos hiperbólicos, se convierte finalmente en:

$$\boxed{Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma_0 (z-l) - Z_0 \sinh \gamma_0 (z-l)}{Z_0 \cosh \gamma_0 (z-l) - Z_L \sinh \gamma_0 (z-l)}} \quad (2.28)$$

De esto podemos extraer que la impedancia se ve distinta según:

- ▷ la carga
- ▷ la longitud de la línea
- ▷ dónde nos situemos en la línea

De aquí extraemos una de las utilidades de las líneas de transmisión: la **transformación de impedancias**, que veremos más adelante.

Veamos ahora las expresiones en función de d :

$$\boxed{Z(d) = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma_0 d + Z_0 \sinh \gamma_0 d}{Z_0 \cosh \gamma_0 d + Z_L \sinh \gamma_0 d}} \quad (2.29)$$

Donde hemos usado que $\cosh(-x) = \cosh x$ y $\sinh(-x) = -\sinh x$. Para la impedancia de entrada a la línea,

$$Z_{in} = Z(d=l) = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma_0 l + Z_0 \sinh \gamma_0 l}{Z_0 \cosh \gamma_0 l + Z_L \sinh \gamma_0 l} \quad (2.30)$$

Tenemos ahora que considerar un caso importante: $\alpha l \gg 1$, o lo que es lo mismo, una línea con muchas pérdidas, en la que

$$\operatorname{tgh} \gamma_0 l \rightarrow 1$$

En este caso, la impedancia de entrada queda:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \operatorname{tgh} \gamma_0 l}{Z_0 + Z_L \operatorname{tgh} \gamma_0 l} \rightarrow Z_0$$

Es decir, que una **línea con muchas pérdidas** da la impresión de estar adaptada, ya que se atenúa mucho la onda reflejada.

2.2.4.2 Línea sin pérdidas

Una línea sin pérdidas recordamos que es aquella en la que la constante de atenuación es nula, $\alpha = 0$ y la constante de propagación es imaginaria pura $\gamma_0 = j\beta$. Para este caso, la impedancia vista en la línea se puede poner en función de senos y cosenos no hiperbólicos, usando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \cosh jx &= \cos x \\ \sinh jx &= j \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$Z(d) = Z_0 \frac{Z_L \cosh j\beta d + Z_0 \sinh j\beta d}{Z_0 \cosh j\beta d + Z_L \sinh j\beta d}$$

Se transforma en

$$\boxed{Z(d) = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta d + j Z_0 \operatorname{sen} \beta d}{Z_0 \cos \beta d + j Z_L \operatorname{sen} \beta d}} \quad (2.31)$$

Podemos definir el **longitud eléctrica de la línea** como

$$\beta l = \theta \quad (2.32)$$

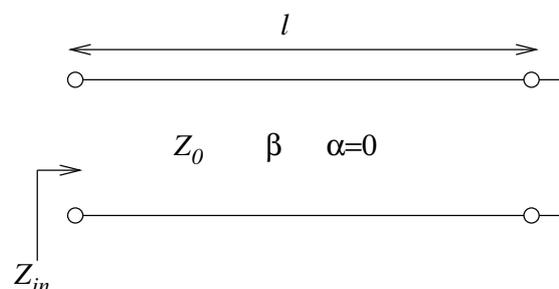


Figura 2.12: Línea de transmisión terminada en cortocircuito

2.2.4.3 Casos particulares

Veamos algunos casos de interés en cuanto a la impedancia de líneas de transmisión.

Línea de transmisión sin pérdidas terminada en cortocircuito

Se ve reflejado este caso en la figura (2.12).

Para este caso vemos como queda la impedancia de entrada a la línea:

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_0 \frac{Z_L \cos \theta + jZ_0 \operatorname{sen} \theta}{Z_0 \cos \theta + jZ_L \operatorname{sen} \theta} \Big|_{Z_L=0} \\ &= jZ_0 \operatorname{tg} \theta \end{aligned} \quad (2.33)$$

Se ha definido $\theta = \beta l = \frac{2\pi}{\lambda}l$, como se mencionó en el apartado anterior.

Vemos por tanto que se trata de una impedancia reactiva pura. Es lógico, ya que se trata de una línea sin pérdidas y en el otro extremo hay un cortocircuito, por lo que no hay disipación de potencia.

Hay dos casos particulares interesantes:

- ↻ $l = \frac{\lambda}{2}$. Para una longitud de línea igual a la mitad de la longitud de onda, $\theta = \pi$ y se ve a la entrada $Z_{in} = 0$
- ↻ $l = \frac{\lambda}{4}$. En este caso, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $Z_{in} = j\infty$

Línea de transmisión sin pérdidas terminada en circuito abierto

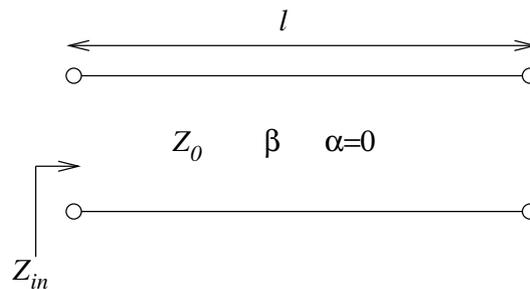


Figura 2.13: Línea de transmisión terminada en circuito abierto

Se puede ver en la figura (2.13). Dado que de nuevo estamos ante una línea sin pérdidas, podemos hacer el límite en $Z_L = \infty$ para obtener la siguiente impedancia vista a la entrada:

$$Z_{in} = \frac{Z_0}{j \operatorname{tg} \theta} \quad (2.34)$$

O lo que es lo mismo, la siguiente admitancia:

$$Y_{in} = jY_0 \operatorname{tg} \theta$$

Línea de transmisión con pérdidas terminada en cortocircuito

El esquema es el mismo que en la figura (2.12), pero $\alpha \neq 0$. Ahora hacemos $Z_L = 0$ en la ecuación (2.30):

$$Z_{in} = Z_0 \operatorname{tgh} \gamma l$$

En este caso se trata de una impedancia compleja, con partes real e imaginaria, y donde la parte real modela las pérdidas que se producen a lo largo de la línea

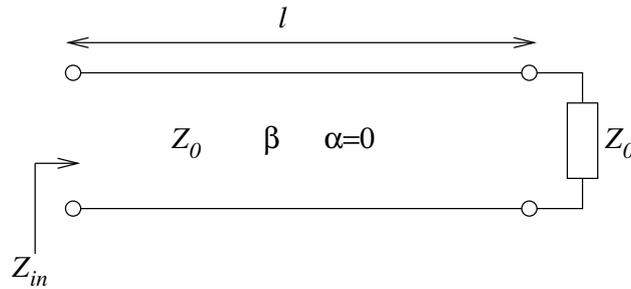


Figura 2.14: Línea sin pérdidas terminada en una impedancia \$jZ_0\$

Línea de transmisión sin pérdidas terminada en \$jZ_0\$

Se refleja este caso en la figura (2.14).

Cuando se acaba una línea con su impedancia característica (imaginaria pura) se obtiene:

$$Z_{in} = jZ_0 \frac{\cos \theta + \text{sen } \theta}{\cos \theta - \text{sen } \theta} \quad (2.35)$$

2.2.5 Relación entre impedancia vista y coeficiente de reflexión

La impedancia vista y el coeficiente de reflexión de una línea de transmisión están relacionados, como vamos a ver a continuación. Usando estas dos expresiones:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{V_0^+ e^{-\gamma_0 z} + V_0^- e^{\gamma_0 z}}{V_0^+ e^{-\gamma_0 z} - V_0^- e^{\gamma_0 z}}$$

$$\rho(z) = \frac{V_0^-}{V_0^+} e^{2\gamma_0 z}$$

Y llevando la del coeficiente de reflexión a la de la impedancia tenemos:

$$Z(z) = Z_0 \frac{V_0^+ e^{-\gamma_0 z} (1 + \rho(z))}{V_0^+ e^{-\gamma_0 z} (1 - \rho(z))}$$

De donde es inmediato obtener:

$$\boxed{Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}} \quad (2.36)$$

Y también la relación inversa:

$$\boxed{\rho(z) = \frac{Z(z) - Z_0}{Z(z) + Z_0}} \quad (2.37)$$

2.2.6 Cálculo de potencias

Vamos a ver ahora cómo podemos abordar el cálculo de potencias en una línea de transmisión terminada, en el caso general de línea con pérdidas y terminada en \$Z_L\$. En la figura (2.15) podemos ver los esquemas equivalentes para el cálculo de la potencia que entra a la línea.

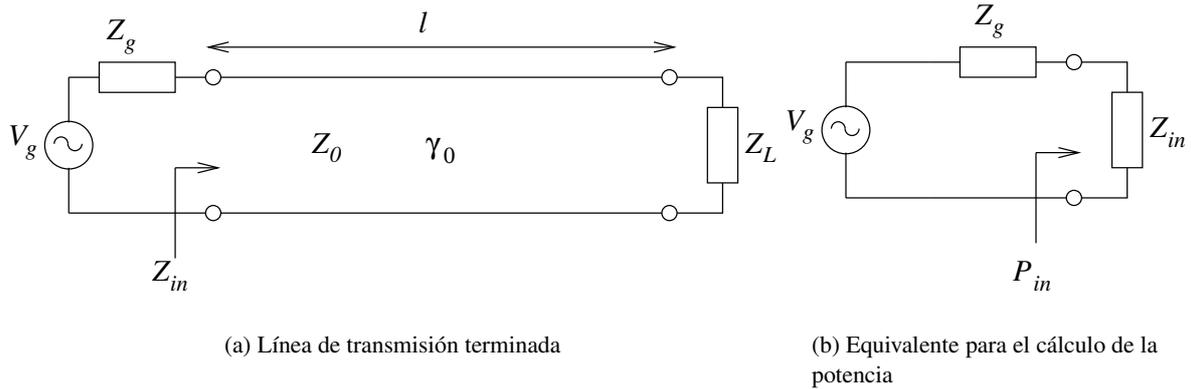


Figura 2.15: Cálculo de potencias en una línea de transmisión terminada

Tenemos la constante de propagación en el caso general, $\gamma_0 = \alpha + j\beta$, y la impedancia de entrada a la línea la escribimos en función del coeficiente de reflexión a la entrada, ρ_{in} :

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \rho_{in}}{1 - \rho_{in}}$$

donde

$$\rho_{in} = \rho_L e^{-2\gamma_0 l}$$

Si las pérdidas no son muy grandes, $2\alpha l \ll 1$, podemos aproximar $e^{-2\alpha l}$ por los primeros términos de su desarrollo en serie:

$$e^x \simeq 1 + x$$

$$\rho_{in} \simeq \rho_L (1 - 2\alpha l) e^{-j2\beta l}$$

Quedando la impedancia de entrada:

$$\begin{aligned} Z_{in} &\simeq Z_0 \frac{1 + \rho_L (1 - 2\alpha l) e^{-j2\beta l}}{1 - \rho_L (1 - 2\alpha l) e^{-j2\beta l}} \\ &= Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-j2\beta l} - 2\alpha l \rho_L e^{-j2\beta l}}{1 - \rho_L e^{-j2\beta l} + 2\alpha l \rho_L e^{-j2\beta l}} \\ &= \underbrace{Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-j2\beta l}}{1 - \rho_L e^{-j2\beta l}}}_{Z_{in}|_{\alpha=0}} \underbrace{\frac{1 - \frac{2\alpha l \rho_L e^{-j2\beta l}}{1 + \rho_L e^{-j2\beta l}}}{1 + \frac{2\alpha l \rho_L e^{-j2\beta l}}{1 - \rho_L e^{-j2\beta l}}}}_F \end{aligned}$$

Como vemos, queda una expresión en función de la impedancia de entrada para el caso sin pérdidas multiplicada por un factor F . Para este factor hay dos casos particulares:

$$\supset 1 + \rho_L e^{-j2\beta l} = 0, \text{ entonces } F = \infty \text{ y } \rho_{in} = -1$$

$$\supset 1 - \rho_L e^{-j2\beta l} = 0, \text{ entonces } F = 0 \text{ y } \rho_{in} = 1$$

Por tanto, cuando nos pidan calcular potencias en una línea con pérdidas seguiremos los siguientes pasos:

1. Comprobar que $2\alpha l \ll 1$, con lo que podemos hacer la aproximación de $e^{\pm 2\alpha l} \simeq 1 \pm 2\alpha l$
2. Calcular la impedancia de entrada como si no hubiera pérdidas
3. Calcular el coeficiente de reflexión a la entrada:

$$\rho_{in} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

con la Z_{in} antes calculada, y comprobar que es distinto de 1 y -1

4. Si no se cumple alguna de las condiciones anteriores, hay que hacer el cálculo completo con las funciones hiperbólicas

Hay que advertir, sin embargo, que las aproximaciones no las podremos hacer en determinados casos. Por ejemplo, si nos piden la potencia disipada en una línea terminada en cortocircuito no podemos despreciar las pérdidas de la línea, ya que son las únicas que hay y por tanto hay que considerarlas, o si no obtendríamos que no hay potencia disipada.

Por otro lado, si quisiéramos calcular una adaptación de impedancias, al variar poco la reactancia si despreciamos las pérdidas, en este caso sí que podemos.

2.2.7 Equivalente de Thevenin desde la salida

Veamos cómo obtenemos el equivalente de Thevenin de una línea de transmisión, que se calcula de la misma forma que en Teoría de Circuitos: para obtener la tensión equivalente se mide la tensión en circuito abierto y para calcular la impedancia equivalente, se mide la corriente con el generador de entrada desactivado.

2.2.7.1 Impedancia equivalente

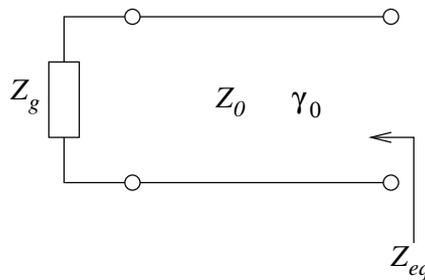


Figura 2.16: Cálculo de la impedancia equivalente

$$Z_{eq} = Z_0 \frac{Z_g \cosh \gamma_0 l + Z_0 \sinh \gamma_0 l}{Z_0 \cosh \gamma_0 l + Z_g \sinh \gamma_0 l} \quad (2.38)$$

Para el caso particular de $Z_g = Z_0$, lo que se ve es la impedancia de la línea, $Z_{eq} = Z_0$.

2.2.7.2 Tensión equivalente

La tensión equivalente es el valor de la onda de tensión en $z = l$:

$$V_{eq} = V(z = l)|_{I(z=l)=0}$$

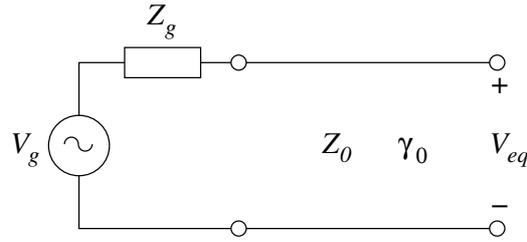


Figura 2.17: Cálculo de la tensión equivalente

$$I(z=l) = 0 \Rightarrow V_0^+ e^{-\gamma_0 l} = V_0^- e^{\gamma_0 l}$$

Con estas dos expresiones, tenemos la siguiente tensión equivalente:

$$V_{eq} = V_0^+ e^{-\gamma_0 l} + V_0^- e^{\gamma_0 l} = 2V_0^+ e^{-\gamma_0 l}$$

Usando la expresión de la ecuación (2.22), que recordamos a continuación:

$$V_0^+ = V_g \frac{Z_0 (Z_L + Z_0)}{(Z_g + Z_0) (Z_L + Z_0) + e^{-2\gamma_0 l} (Z_0 - Z_g) (Z_L - Z_0)}$$

Y dividiendo por $(Z_g + Z_0) (Z_L + Z_0)$, se obtiene para V_0^+ :

$$V_0^+ = V_g \frac{\frac{Z_0}{Z_g + Z_0}}{1 - e^{-2\gamma_0 l} \cdot \rho_g \cdot \rho_L}$$

Donde hemos definido convenientemente ρ_g como

$$\rho_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$$

Podemos entonces extraer el valor definitivo del generador equivalente de Thevenin:

$$V_{eq} = \frac{2V_g Z_0}{(Z_g + Z_0) e^{\gamma_0 l} - (Z_g - Z_0) e^{-\gamma_0 l}} \quad (2.39)$$

Para el caso particular de $Z_g = Z_0$, lo que se tiene es

$$V_{eq} = V_g e^{-\gamma_0 l}$$

Se trata de un generador retardado.

Por tanto, si $Z_g = Z_0$, el equivalente es el que vemos en la figura (2.18), con $V_{eq} = V_g e^{-\gamma_0 l}$.

2.2.8 Diagrama de onda estacionaria

En una línea de transmisión se producen ondas incidentes y reflejadas, que se suman en cada punto de la línea de transmisión, produciendo variaciones en la onda de tensión a lo largo de toda la línea. Queremos ver cual es esa variación, para lo que estudiaremos el caso simplificado de línea sin pérdidas ($\alpha = 0$).

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}$$

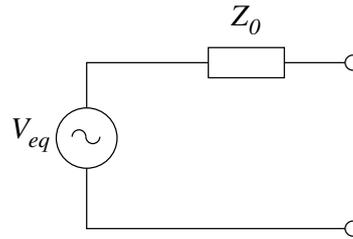


Figura 2.18: Equivalente de Thevenin para una línea con $Z_g = Z_0$

2.2.8.1 Línea adaptada: $Z_L = Z_0$

En el caso particular de que terminemos la línea con una impedancia igual a la impedancia característica de la línea, tenemos las siguientes ondas de tensión y corriente:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z}$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-j\beta z}$$

Y los módulos de las ondas de tensión y corriente son

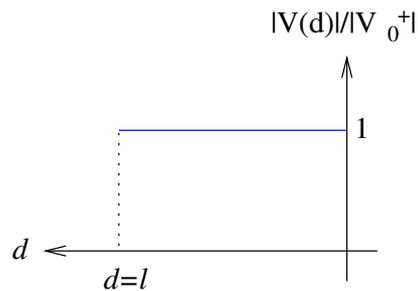


Figura 2.19: Diagrama de onda estacionaria de una línea sin pérdidas con $Z_L = Z_0$

$$|V(z)| = |V_0^+|$$

$$|I(z)| = |I_0^+|$$

En el diagrama de onda estacionaria de la figura (2.19) lo que dibujamos en el eje vertical es la amplitud de la onda de tensión normalizada a $|V_0^+|$. Se observa que es una línea recta, lo que nos indica que sólo hay onda incidente, al no haber variación de la amplitud de la onda de tensión.

2.2.8.2 Línea terminada con $Z_L \neq Z_0$

En este caso no hay adaptación en la línea, por lo que hay onda reflejada y la resultante es superposición de la incidente y la reflejada:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}$$

En el plano complejo representaríamos las amplitudes complejas de las ondas incidente y reflejada, como vemos en la figura (2.20). En esta representación, $V(z)$ varía entre un valor mínimo (V_0^+ y V_0^- en contrafase) y uno máximo (V_0^+ y V_0^- en fase).

Buscamos la expresión para el diagrama de onda estacionaria, normalizado a $|V_0^+|$.

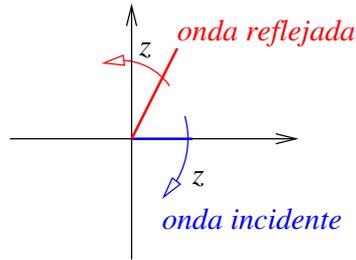


Figura 2.20: Representación en el plano complejo de las ondas incidente y reflejada

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} (1 + \rho(z))$$

$$|V(z)| = |V_0^+| |1 + \rho(z)| \Rightarrow \frac{|V(d)|}{|V_0^+|} = |1 + \rho(d)|$$

Si escribimos el coeficiente de reflexión en la carga como

$$\rho_L = |\rho_L| e^{j\phi_L}$$

$$|1 + \rho(d)| = \sqrt{(1 + \rho)(1 + \rho^*)}$$

$$= \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos(\phi_L - 2\beta d)}$$

El valor máximo del diagrama de onda estacionaria sucede cuando $\cos(\phi_L - 2\beta d) = 1$, y el mínimo cuando es -1 .

$$\text{máx} \frac{|V(d)|}{|V_0^+|} = \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L|} = 1 + |\rho_L|$$

$$\text{mín} \frac{|V(d)|}{|V_0^+|} = \sqrt{1 + |\rho_L|^2 - 2|\rho_L|} = 1 - |\rho_L|$$

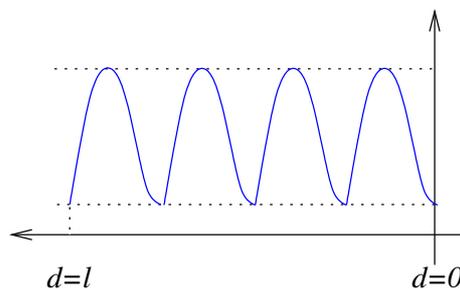


Figura 2.21: Diagrama de onda estacionaria para línea no adaptada

En la figura (2.21) vemos un ejemplo de diagrama de onda estacionaria, variando entre $1 - |\rho_L|$ y $1 + |\rho_L|$, que nos da la amplitud de la sinusoide en cada punto de la línea de transmisión.

De la misma forma que dibujamos un diagrama de onda estacionaria de tensión, podemos ver un diagrama de onda estacionaria de corriente:

$$I(z) = I_0^+ e^{-j\beta z} (1 - \rho(z))$$

$$\frac{|I(d)|}{|I_0^+|} = |1 - \rho(d)| = \sqrt{1 + |\rho_L|^2 - 2|\rho_L| \cos(\phi_L - 2\beta d)}$$

Se puede ver que los máximos del diagrama de onda estacionaria de tensión coinciden con los mínimos del de corriente, y viceversa. Esto lo podemos observar gráficamente en la figura (2.22).

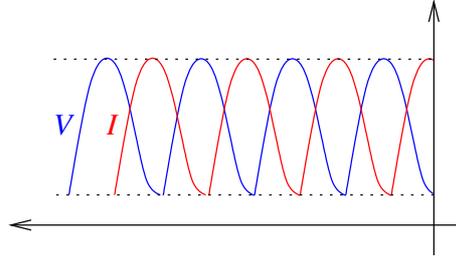


Figura 2.22: Diagramas de onda estacionaria de tensión y corriente

2.2.8.3 Casos de interés

Línea terminada en cortocircuito

En este caso tenemos

$$Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = -1$$

Vemos en la figura (2.23) que el diagrama refleja una transformación de impedancia, variando entre una amplitud 0 y 2. Esta transformación es periódica de periodo $\lambda/2$.

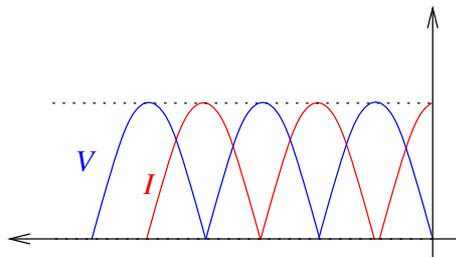


Figura 2.23: Diagrama de onda estacionaria para línea terminada en cortocircuito

En los mínimos del diagrama la onda queda atrapada, es por eso que tenemos onda estacionaria.

Línea terminada en circuito abierto

Ahora lo que tenemos es

$$Z_L = \infty \Rightarrow \rho_L = 1$$

El diagrama de onda estacionaria es el mismo, pero cambiando V por I en la figura (2.23).

Línea terminada en una impedancia capacitiva

En este caso terminamos la línea con jZ_0 :

$$Z_L = jZ_0 \Rightarrow \rho_L = j$$

El diagrama de onda estacionaria es el mismo, pero produciéndose un desfase en el comienzo del diagrama, como vemos en la figura (2.24).

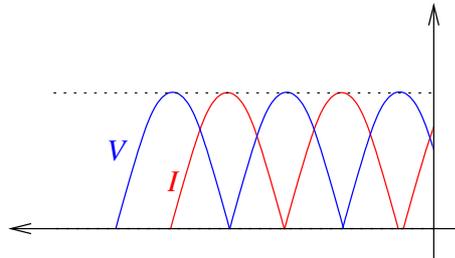


Figura 2.24: Diagrama de onda estacionaria para línea terminada en impedancia capacitiva

Línea terminada en una impedancia resistiva

En este caso la impedancia es una resistencia pura:

$$Z_L = R_L > Z_0 \Rightarrow \rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = k > 0$$

Está claro que $k < 1$. El diagrama de onda estacionaria se mueve entre $1 + |\rho_L| < 2$ y $1 - |\rho_L| > 0$, teniendo la misma forma que el del caso de línea terminada en circuito abierto.

Lo que hay ahora en la línea es una combinación de onda estacionaria pura y una onda propagándose. Ahora sí hay onda propagada ya que los mínimos del diagrama no son cero.

Si $\phi_L \in [0, \pi)$ entonces en el diagrama lo primero que encontramos es un máximo de tensión y por tanto un mínimo de corriente.

Si $\phi_L \in [-\pi, 0)$, encontramos primero un mínimo de tensión y un máximo de corriente.

Nota. El diagrama de onda estacionaria se dibuja entre $d = 0$ y $d = l$

2.2.9 Coeficiente de onda estacionaria

El coeficiente de onda estacionaria, s , se define como la relación entre los valores máximo y mínimo del valor del campo eléctrico. En una línea de transmisión se puede definir también como la relación entre los valores máximo y mínimo de los módulos de las ondas de tensión o corriente:

$$s = \frac{|V(d)|_{max}}{|V(d)|_{min}} = \frac{|I(d)|_{max}}{|I(d)|_{min}}$$

O lo que es lo mismo:

$$s = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} \quad (2.40)$$

Da una idea de la amplitud de la onda estacionaria y de lo adaptada que está la línea. En los límites tenemos:

↪ Si $|\rho_L| = 0$ entonces $s = 1$

↪ Si $|\rho_L| = 1$ entonces $s = \infty$

Por tanto, el coeficiente de onda estacionaria está restringido al intervalo $(1, \infty)$.

Podemos obtener también el coeficiente de reflexión en función del coeficiente de onda estacionaria:

$$|\rho_L| = \frac{s-1}{s+1} \quad (2.41)$$

2.2.10 Potencia transmitida a lo largo de la línea de transmisión

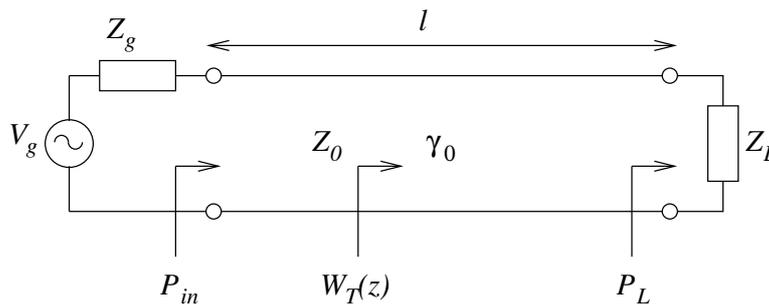


Figura 2.25: Cálculo de potencia transmitida en una línea de transmisión

Podemos calcularla como haríamos en un circuito usando la teoría de circuitos. Para ello, tenemos que considerar impedancias, o bien usar la expresión de la potencia media para un bipolo por el que circula una corriente \bar{I} (fasor corriente) y en el que cae una tensión \bar{V} (fasor tensión), teniendo en cuenta que estamos tratando con generadores monocromáticos (por eso podemos usar fasores). En este bipolo, la potencia media es

$$P_{media} = \frac{1}{2} \Re e (\bar{V} \cdot \bar{I}^*)$$

La potencia transmitida en un punto de la línea es $W_T(z)$. En lugar de usar fasores, en una línea de transmisión tenemos amplitudes complejas: $V(z)$ e $I(z)$.

$$\begin{aligned} W_T(z) &= \frac{1}{2} \Re e (V(z) \cdot I(z)^*) \\ &= \frac{1}{2} \Re e \left((V_0^+ e^{-\gamma_0 z} + V_0^- e^{\gamma_0 z}) \frac{1}{Z_0^*} (V_0^{+*} e^{-\gamma_0^* z} - V_0^{-*} e^{\gamma_0^* z}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re e \left((V_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V_0^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}) \frac{1}{Z_0^*} (V_0^{+*} e^{-\alpha z} e^{j\beta z} - V_0^{-*} e^{\alpha z} e^{-j\beta z}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re e \left(\frac{|V_0^+|^2 e^{-2\alpha z}}{Z_0^*} - \frac{|V_0^-|^2 e^{2\alpha z}}{Z_0^*} + \frac{V_0^- V_0^{+*} e^{j2\beta z} - V_0^+ V_0^{-*} e^{-j2\beta z}}{Z_0^*} \right) \end{aligned}$$

En esta expresión podemos diferenciar 3 términos:

↪ $\frac{|V_0^+|^2 e^{-2\alpha z}}{Z_0^*}$ es el término que quedaría solo si únicamente hubiera onda incidente: $W_{T_{oi}}(z)$

↪ $-\frac{|V_0^-|^2 e^{2\alpha z}}{Z_0^*}$ quedaría solo si únicamente hubiese onda reflejada: $W_{T_{or}}(z)$

$$\Rightarrow \frac{V_0^- V_0^{+*} e^{j2\beta z} - V_0^+ V_0^{-*} e^{-j2\beta z}}{Z_0^*} \text{ es el término de interacción entre onda incidente y reflejada: } W_{T_{interaccion}}(z)$$

Por tanto, la potencia transmitida queda separada en esos tres términos:

$$W_T(z) = W_{T_{oi}}(z) - W_{T_{or}}(z) + W_{T_{interaccion}}(z)$$

Podemos escribir la expresión en una forma más reducida:

$$W_T(z) = \frac{1}{2} \Re e \left(\frac{|V_0^+|^2 e^{-2\alpha z} - |V_0^-|^2 e^{2\alpha z}}{Z_0^*} + \frac{2j \Im m (V_0^{+*} V_0^- e^{j2\beta z})}{Z_0^*} \right) \quad (2.42)$$

Es fácil comprobar que si Z_0 es real (líneas sin pérdidas y de bajas pérdidas), la onda incidente y la reflejada son ortogonales, ya que $W_{T_{interaccion}}(z) = 0$.

2.2.10.1 Línea de transmisión sin pérdidas

En este caso recordemos que $R = G = 0$, por lo que los parámetros secundarios son

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma_0 = j\omega\sqrt{LC}$$

Y dado que $\alpha = 0$, la expresión para la potencia transmitida se convierte en:

$$W_T(z) = \frac{1}{2} \Re e \left(\frac{|V_0^+|^2 e^{-2\alpha z}}{Z_0^*} \right) - \frac{1}{2} \Re e \left(\frac{|V_0^-|^2 e^{2\alpha z}}{Z_0^*} \right) \quad (2.43)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} - \frac{1}{2} \frac{|V_0^-|^2}{Z_0} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z_0} (1 - |\rho_L|^2)$$

La potencia transmitida es constante a lo largo de toda la línea. Esto es lógico, ya que $\alpha = 0$ y por tanto no hay pérdidas en la línea.

Entonces, $P_{in} = P_L$: toda la potencia que entrega el generador llega a la carga.

Cuidado con esto, ya que no es lo mismo que si no hubiera línea, ya que en ese caso el generador vería Z_L , y no la impedancia de la línea terminada, por lo que las potencias son distintas.

2.2.10.2 Línea de transmisión de bajas pérdidas

Recordemos que este caso es el que cumple $R \ll \omega L$ y $G \ll \omega C$, por lo que los parámetros secundarios se reducen a

$$Z_0 \simeq \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma_0 \simeq j\omega\sqrt{LC} + \frac{GZ_0}{2} + \frac{R}{2Z_0}$$

Aquí podemos despreciar el término de interacción, ya que Z_0 es aproximadamente real, por lo que la potencia transmitida nos queda:

$$W_T(z) \simeq \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2 e^{-2\alpha z}}{Z_0} - \frac{1}{2} \frac{|V_0^-|^2 e^{2\alpha z}}{Z_0} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z_0} e^{-2\alpha z} (1 - |\rho(z)|^2) \quad (2.44)$$

Sacamos las siguientes conclusiones:

- Como Z_0 es aproximadamente real, despreciamos el término de interacción en una línea de bajas pérdidas
- Ahora la potencia no es constante a lo largo de la línea, por lo que la potencia en la carga no es la que entrega el generador: $P_{in} \neq P_L$. Por supuesto, $P_{in} > P_L$

Podemos encontrar una expresión alternativa para la potencia transmitida en una línea de bajas pérdidas:

$$W_T(z) \simeq W_{T_{oi}}(z) - W_{T_{or}}(z) = \frac{1}{2Z_0} (|V_0^+|^2 e^{-2\alpha z} - |V_0^-|^2 e^{2\alpha z})$$

Si usamos la definición del coeficiente de reflexión:

$$\rho(z) = \frac{V_0^- e^{\gamma_0 z}}{V_0^+ e^{-\gamma_0 z}} \Rightarrow |\rho(z)| = \frac{|V_0^-| e^{\alpha z}}{|V_0^+| e^{-\alpha z}}$$

Reescribimos la potencia transmitida:

$$\begin{aligned} W_T(z) &= \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} e^{-2\alpha z} (1 - |\rho(z)|^2) \\ &= W_{T_{oi}}(z) (1 - |\rho(z)|^2) \end{aligned}$$

A $|\rho(z)|^2$ se le llama **coeficiente de reflexión en potencia**: refleja la importancia de la onda reflejada en la potencia transmitida.

La potencia que entrega el generador a la entrada de la línea es

$$\begin{aligned} P_{in} &= W_T(z=0) = W_{T_{oi}}(z=0) (1 - |\rho_{in}|^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} (1 - |\rho_L|^2 e^{-4\alpha l}) \end{aligned}$$

ya que $\rho_{in} = \rho_L e^{-2\gamma_0 l}$.

A la salida de la línea tenemos

$$\begin{aligned} P_L &= W_T(z=l) = W_{T_{oi}}(z=l) (1 - |\rho_L|^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} e^{-2\alpha l} (1 - |\rho_L|^2) \end{aligned}$$

2.2.11 Atenuación de la línea de transmisión terminada

Definimos la atenuación de la línea de transmisión como la relación entre la potencia que entrega el generador a la línea y la que llega a la carga:

$$\boxed{A = \frac{P_{in}}{P_L}} \quad (2.45)$$

Podemos definir la atenuación también en Neperios y en Decibelios (ver Apéndice A):

$$A(Np) = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{in}}{P_L}$$

$$A(dB) = 10 \log \frac{P_{in}}{P_L}$$

2.2.11.1 Atenuación cuando no hay onda reflejada

No hay onda reflejada si la línea está adaptada, es decir: $Z_L = Z_0$, con lo que $\rho_L = 0$ y la potencia entregada por el generador es

$$P_{in} = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0}$$

Mientras que la potencia que llega a la carga es

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} e^{-2\alpha l}$$

Por tanto, la atenuación es

$$\boxed{A = e^{2\alpha l} = \alpha l \quad Np} \quad (2.46)$$

Esta es la mínima atenuación que puede introducir una línea: la que sólo tiene en cuenta las pérdidas debidas a la línea.

2.2.11.2 Atenuación cuando la línea de transmisión está terminada en cortocircuito

Ahora $Z_L = 0$ y el coeficiente de reflexión es $\rho_L = -1$, por tanto:

$$P_{in} = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} (1 - |\rho_L|^2 e^{-4\alpha l})$$

$$P_L = 0$$

Y ahora la atenuación es infinita

$$A = \infty \quad (2.47)$$

Este es uno de los casos extremos. Ahora la onda reflejada anula a toda la onda incidente en la carga.

2.2.11.3 Atenuación cuando la línea de transmisión está terminada en una Z_L cualquiera

Escribimos ahora directamente la expresión de la atenuación:

$$A = \frac{P_{in}}{P_L} = \frac{\frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} (1 - |\rho_L|^2 e^{-4\alpha l})}{\frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} e^{-2\alpha l} (1 - |\rho_L|^2)}$$

Extraemos $e^{2\alpha l}$ y obtenemos

$$\boxed{A = e^{2\alpha l} \frac{1 - |\rho_L|^2 e^{-4\alpha l}}{1 - |\rho_L|^2}} \quad (2.48)$$

Se mide en veces. Lo que se tiene es la mínima atenuación del caso de línea adaptada, $A = e^{2\alpha l}$, multiplicada por un factor corrector, que es fácil de comprobar que es mayor o igual que 1.

Por tanto, concluimos que la atenuación depende de la carga (influencia de las reflexiones) y de la propia línea de transmisión (pérdidas, α).

2.2.11.4 Aproximación de línea con pocas pérdidas

Una línea con pocas pérdidas es aquella que cumple $\alpha l \ll 1$, que no es lo mismo que una línea de bajas pérdidas.

En este caso, lo que se puede hacer es aproximar $e^{\pm 2\alpha l}$ por los 2 primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor:

$$e^{\pm 2\alpha l} \simeq 1 \pm 2\alpha l$$

Para la línea adaptada, la atenuación en este caso se puede aproximar por

$$A \simeq 1 + 2\alpha l$$

Para una línea terminada en Z_L cualquiera se obtiene lo siguiente:

$$A \simeq 1 + 2\alpha l \frac{1 + |\rho_L|^2}{1 - |\rho_L|^2} = 1 + 2\alpha' l$$

Donde hemos definido una nueva constante de atenuación, que vamos a llamar **constante de atenuación aparente** (o ficticia):

$$\alpha' = \alpha \frac{1 + |\rho_L|^2}{1 - |\rho_L|^2} \quad (2.49)$$

α refleja las pérdidas de la línea, mientras que el otro factor representa las pérdidas debidas a la onda reflejada.

Si se cumple $\alpha' l \ll 1$ entonces la atenuación en este caso sería

$$\boxed{A \simeq e^{2\alpha' l}} \quad (2.50)$$

Podemos escribir la constante de atenuación aparente en función del coeficiente de onda estacionaria:

$$\alpha' = \alpha \frac{s^2 + 1}{2s} \quad (2.51)$$

A más onda estacionaria más atenuación.

2.2.12 Potencia disipada en la línea de transmisión terminada

La potencia que se disipa en la línea es la parte de la potencia entregada por el generador que no llega a la carga, es decir, la diferencia entre ambas:

$$\boxed{P_{dis} = P_{in} - P_L} \quad (2.52)$$

2.2.12.1 Potencia disipada cuando no hay onda reflejada

Cuando $Z_L = Z_0$, hemos visto en el apartado de atenuación las expresiones para la potencia entregada por el generador y la que llega a la carga, por lo que la potencia disipada queda

$$\boxed{P_{dis} = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} (1 - e^{-2\alpha l})} \quad (2.53)$$

Este será el mínimo valor de potencia que se disipa en una línea, ya que sólo se consideran las pérdidas de la línea al no haber onda reflejada.

2.2.12.2 Potencia disipada cuando la línea de transmisión está terminada en cortocircuito

Ahora no hay potencia entregada a la carga, por tanto la potencia disipada en la línea coincide con la entregada por el generador:

$$P_{dis} = P_{in} \quad (2.54)$$

Esta es la situación más desfavorable posible.

2.2.12.3 Potencia disipada cuando la línea de transmisión está terminada en una Z_L cualquiera

Ahora la potencia disipada depende del coeficiente de reflexión en la carga, igual que la atenuación:

$$\begin{aligned} P_{dis} &= P_{in} - P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} (1 - |\rho_L|^2 e^{-4\alpha l}) - \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} e^{-2\alpha l} (1 - |\rho_L|^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} (1 - |\rho_L|^2 e^{-4\alpha l} - e^{-2\alpha l} + |\rho_L|^2 e^{-2\alpha l}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} (1 - e^{-2\alpha l} + |\rho_L|^2 e^{-2\alpha l} (1 - e^{-2\alpha l})) \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} (1 - e^{-2\alpha l}) (1 + |\rho_L|^2 e^{-2\alpha l}) \end{aligned}$$

Se puede escribir por tanto en función de la potencia disipada para el caso en el que la línea esté adaptada:

$$P_{dis} = P_{dis}|_{Z_L=Z_0} (1 + |\rho_L|^2 e^{-2\alpha l})$$

Donde $(1 + |\rho_L|^2 e^{-2\alpha l})$ es un factor corrector que refleja el hecho de que haya onda reflejada, y es mayor que 1.

También podemos expresarla en función de la potencia de entrada a la línea de transmisión:

$$P_{dis} = P_{in} \left(1 - e^{-2\alpha l}\right) \frac{1 + |\rho_L|^2 e^{-2\alpha l}}{1 - |\rho_L|^2 e^{-4\alpha l}} \quad (2.55)$$

Ya que la potencia de entrada a la línea es

$$P_{in} = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} \left(1 - |\rho_L|^2 e^{-4\alpha l}\right) \quad (2.56)$$

Así pues, calcular la potencia entregada a la carga o disipada en la línea se reduce a calcular la Z_{in} de la línea de transmisión, ya que podemos obtener P_{in} como en teoría de circuitos, sin más que poner el equivalente de la línea como esa Z_{in} . Eso sí, tendremos que tener cuidado con verificar si podemos despreciar las pérdidas, ya que si no podemos habrá que usar las expresiones de senos y cosenos hiperbólicos.

2.2.12.4 Potencia disipada cuando $Z_g = Z_0$

Recordemos que en este caso,

$$V_0^+ = \frac{V_g}{2} \quad (2.57)$$

La potencia transmitida a la línea por la onda incidente es

$$W_{T_{oi}}(z) = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} e^{-2\alpha z} = \frac{1}{8} \frac{|V_g|^2}{Z_0} e^{-2\alpha z}$$

La **potencia disponible en el generador**, P_{dg} , es la potencia transmitida por la onda incidente en $z = 0$:

$$W_{T_{oi}}(z = 0) = \frac{|V_g|^2}{8Z_0} = P_{dg}$$

La potencia entregada por el generador es

$$P_{in} = P_{dg} \left(1 - |\rho_{in}|^2\right)$$

y la entregada a la carga

$$P_L = P_{dg} e^{-2\alpha l} \left(1 - |\rho_L|^2\right)$$

Si no hay pérdidas:

$$P_L = P_{dg} \left(1 - |\rho_L|^2\right)$$

Y el módulo del coeficiente de reflexión es constante:

$$|\rho(z)| = |\rho|$$

Por tanto

$$P_{in} = P_{dg} \left(1 - |\rho|^2\right) = P_L \quad (2.58)$$

Toda la potencia que entra a la línea llega a la carga, lo cual es lógico ya que no hay pérdidas.

2.2.12.5 Potencia disipada cuando $Z_L = Z_g = Z_0$

En este caso particular lo que se tiene es

$$P_{in} = P_L = P_{dg} \quad (2.59)$$

Es decir, se cumple la **máxima transferencia de potencia**.

Hay que tener cuidado al considerar cuándo hay máxima transferencia, que ocurre en este caso, y no cuando no haya onda reflejada, ya que se puede dar el caso de que no haya onda reflejada y no se trate de máxima transferencia de potencia o al revés.

La máxima transferencia de potencia implica que la impedancia que ve el generador es la misma que su impedancia interna conjugada: $Z_{in} = Z_g^*$. Por tanto, aunque tuviéramos $Z_g \neq Z_0$ y $Z_L \neq Z_0$, caso en el que hay onda reflejada, podría llegarse a la máxima transferencia de potencia si se diseña la línea de transmisión de forma adecuada.

Ejemplo 2.1:

Si $Z_g = R_L$ y $Z_L = R_L$, con cualquier Z_0 , si $l = \lambda/2 \Rightarrow Z_{in} = R_L$. Tenemos un **adaptador en $\lambda/2$** , por lo que hay máxima transferencia de potencia con onda reflejada

Si $Z_g = R_g$, $Z_L = R_L$ y $Z_0 = \sqrt{R_g R_L}$ y $l = \lambda/4$, entonces lo que hay es un **transformador en $\lambda/4$** , en el que $Z_{in} = R_g$ y por tanto hay máxima transferencia de potencia. ■

Tenemos que hacer en este punto una importante distinción:

- **Adaptación de impedancias** significa que un generador ve su impedancia interna conjugada: $Z_{in} = Z_g^*$, por lo que la potencia disponible en el generador es la entrante a la línea (o a la impedancia): $P_{in} = P_{dg}$
- **Línea adaptada a la salida** significa que la línea está cargada a la salida con una impedancia de valor su impedancia característica: $Z_L = Z_0$, lo que implica que no hay onda reflejada

Estos dos conceptos no tienen nada que ver entre sí.

2.2.13 Interconexión de líneas de transmisión

Básicamente, hay dos formas de interconectar líneas de transmisión: en serie y en paralelo. Vemos esquemas para ambas formas en la figura (2.26).

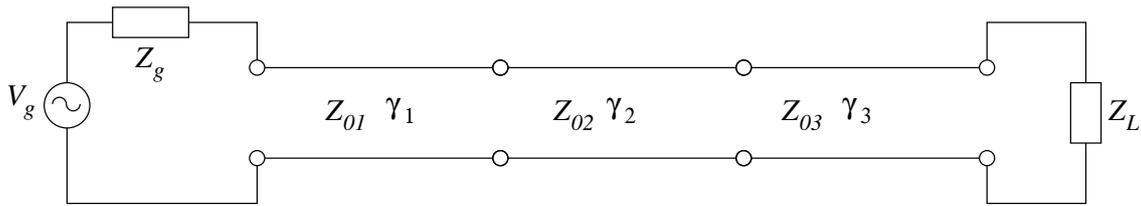
La conexión **serie** (o en cascada) tiene similitud con la propagación de ondas planas homogéneas por diferentes medios, mientras que la conexión en **paralelo** ya no tiene analogía con las ondas planas.

Como mencionamos al principio del tema, los modos TE y TM en la línea de transmisión están al corte si se trabaja a frecuencias inferiores a la de corte, por lo que no propagan energía por la línea de transmisión. Sin embargo, sí almacenan energía en las discontinuidades.

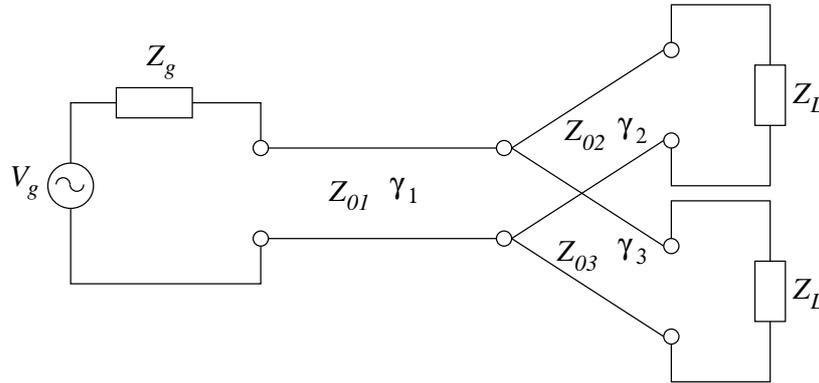
En la figura (2.27) vemos las ondas de tensión y corriente que hay en la discontinuidad de una interconexión entre dos líneas de transmisión. Dado que existen modos TE y TM almacenando energía, lo que ocurre es que las corrientes y las tensiones en l_1 no son las mismas para cada línea:

$$I_1(z = l_1) \neq I_2(z = l_1)$$

$$V_1(z = l_1) \neq V_2(z = l_1)$$



(a) Conexión en serie de líneas de transmisión



(b) Conexión en paralelo de líneas de transmisión

Figura 2.26: Interconexión de líneas de transmisión en (a) serie y (b) paralelo

Esta discontinuidad se puede modelar intercalando un bipuerto reactivo puro (sólo inductancias y capacidades) entre las dos líneas. Este bipuerto lo que modela es el almacenamiento de energía en los modos que están al corte.

Sin embargo, la energía almacenada por los modos TE y TM en las discontinuidades es despreciable si la frecuencia de trabajo es muy inferior a la de corte del primer modo superior. Esto es fácil en líneas de transmisión (coaxiales por ejemplo), pero en guías de onda lo más normal es trabajar a frecuencias cercanas a las de corte de los primeros modos superiores.

Vemos una diferencia entre líneas de transmisión y propagación de ondas planas por diferentes medios, y es que en el segundo caso la solución considerando únicamente los modos TEM es exacta, mientras que para líneas de transmisión hemos visto que no lo es.

A la hora de interconectar las líneas de transmisión se intenta que las transiciones sean lo más suaves posible.

De todas formas, este comportamiento a veces nos puede interesar que ocurra, ya que podemos añadir inductancias y capacidades simplemente conectando dos líneas de transmisión con secciones diferentes.

En cualquier caso, nosotros vamos a considerar que trabajamos a frecuencias suficientemente alejadas de las de corte como para despreciar los efectos de los modos superiores en las discontinuidades.

2.2.14 Función de transferencia de la línea de transmisión terminada

Vamos a ver qué pasa cuando usamos la línea de transmisión a más de una frecuencia, por ejemplo con señales tipo pulso cuadrado, lo habitual cuando se emplea transmisión digital. Lo que se trata es de analizar la distorsión que se produce en la línea por el hecho de que se propaguen diferentes frecuencias por la línea.

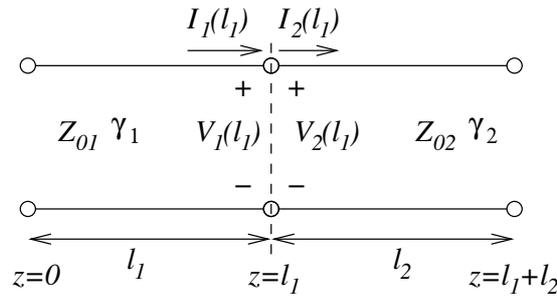


Figura 2.27: Ondas de tensión y corriente en la discontinuidad entre dos líneas de transmisión

En un principio, tenemos que considerar una constante de propagación dependiente de la frecuencia, en la que tanto la constante de atenuación como la de fase, varían con la frecuencia:

$$\alpha(f), \beta(f)$$

⇒ $\alpha(f)$ introduce una distorsión de amplitud

⇒ $\beta(f)$ introduce distorsión de fase

Ambas constantes constituyen la distorsión propia de la línea.

La función de transferencia se define como el cociente entre la onda de tensión en la carga y la tensión del generador de entrada:

$$H(\omega) = \frac{V(z=l)}{V_g}$$

Anteriormente hemos definido $V(z=l)$ como

$$\begin{aligned} V(z=l) &= V_0^+ e^{-\gamma l} + V_0^- e^{\gamma l} \\ &= V_0^+ e^{-\gamma l} (1 + \rho_L) \\ &= V_g e^{-\gamma l} \frac{\frac{Z_0}{R_g + Z_0} \left(1 + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right)}{1 - \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma l}} \\ &= V_g e^{-\gamma l} \frac{\frac{2Z_L}{Z_L + Z_0}}{\frac{R_g + Z_0}{Z_0} - \frac{R_g - Z_0}{Z_0} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma l}} \end{aligned}$$

Por tanto, la función de transferencia que se obtiene es

$$H(\omega) = e^{-j\beta l} \frac{Z_L}{Z_L + Z_0} \frac{2e^{-\alpha l}}{\left(1 + \frac{R_g}{Z_0}\right) + \left(1 - \frac{R_g}{Z_0}\right) \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\alpha l} e^{-j2\beta l}} \quad (2.60)$$

Comentamos algunos términos:

⇒ $e^{-j\beta l}$: para una línea de bajas pérdidas, β es lineal con la frecuencia, por lo que no se introduce distorsión de fase al ser el retardo igual para todas las frecuencias

- ⊃ $\frac{Z_L}{Z_L+Z_0}$: si Z_L es real, lo cual es bastante habitual, no depende de la frecuencia para una línea de bajas pérdidas, ya que Z_0 es aproximadamente real
- ⊃ $e^{-\alpha l}$: en una línea de bajas pérdidas no introduce distorsión, ya que es constante con la frecuencia, y por tanto todas las frecuencias se atenúan por igual
- ⊃ $e^{-2\alpha l} e^{-j2\beta l}$: es la parte que más distorsión introduce, pero desaparece en el caso de que $Z_L = Z_0$

Para el caso particular de $Z_L = Z_0$, la respuesta en frecuencia resultante es

$$H(\omega) = e^{-j\beta l} \frac{e^{-\alpha l}}{1 + \frac{R_g}{Z_0}} \quad (2.61)$$

Sólo existe en este caso la distorsión propia de la línea.

La tensión de salida en el dominio del tiempo para el caso de $Z_L = Z_0$ la escribimos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{V(l)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{V_g(\omega) \cdot H(\omega)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} V_g(\omega) \frac{e^{-j\beta l} e^{-\alpha l}}{1 + \frac{R_g}{Z_0}} e^{j\omega t} df \\ &= \frac{e^{-\alpha l}}{1 + \frac{R_g}{Z_0}} \int_{-\infty}^{\infty} V_g(\omega) e^{-j\beta l} e^{j\omega t} df \\ &= \frac{e^{-\alpha l}}{1 + \frac{R_g}{Z_0}} \int_{-\infty}^{\infty} V_g(\omega) e^{j\omega(t - \frac{\beta}{\omega}l)} df \end{aligned}$$

Donde hemos considerado que α no depende de la frecuencia para poder sacarlo de la integral, y hemos escrito df en lugar de $d\omega$ para ahorrarnos el factor 2π .

Se observa que lo que nos queda en la integral es la transformada de Fourier inversa de $V_g(\omega)$, es decir, $v_g(t)$, pero desplazada en el tiempo. El resultado es por tanto:

$$v_L(t) = \frac{e^{-\alpha l}}{1 + \frac{R_g}{Z_0}} v_g\left(t - \frac{\beta}{\omega}l\right)$$

Si definimos el **retardo que introduce la línea** como $t_d = \frac{l\beta}{\omega} = \frac{l}{v_f}$, siendo v_f la velocidad de fase, entonces la tensión en la carga es

$$v_L(t) = \frac{e^{-\alpha l}}{1 + \frac{R_g}{Z_0}} v_g(t - t_d) \quad (2.62)$$

Recordemos que lo hemos calculado para el caso en que $Z_L = Z_0$. Por tanto, en este caso lo único que pasa es que la línea introduce un retardo y una atenuación iguales para todas las frecuencias.

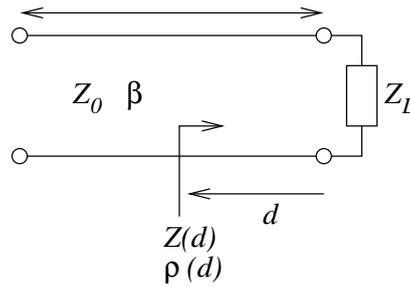


Figura 2.28: Presentación del problema de la línea de transmisión: cálculo de $Z(d)$ y $\rho(d)$

2.3 La carta de Smith

2.3.1 Presentación

Desarrollada simultánea e independientemente por dos personas (P. Smith y A.R. Volpert, de Estados Unidos y la ex-URSS respectivamente) en 1939, es una herramienta gráfica que se usa para resolver problemas de línea de transmisión. Aunque existen más cartas de impedancias y coeficientes de reflexión, la carta de Smith es la más conocida y también la más extendida. Podría parecernos que con los ordenadores de hoy en día, las soluciones gráficas no tienen cabida en la ingeniería, pero nada más lejos de la realidad, ya que la carta de Smith es mucho más que una simple técnica gráfica. Nos permite visualizar el fenómeno de la línea de transmisión y la transformación de impedancias, comprenderlos de forma intuitiva.

Además, nos damos cuenta que resolver analíticamente la impedancia vista en una línea de transmisión como la de la figura (2.28) es bastante engorroso, ya que hay que trabajar con una expresión compleja:

$$Z(d) = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta l + j Z_0 \operatorname{sen} \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j Z_L \operatorname{sen} \beta l}$$

Si miramos por primera vez la carta de Smith podremos sentirnos abrumados, pero la clave para entenderla es que es, fundamentalmente, una representación en coordenadas polares del coeficiente de reflexión ρ . Se basa en la relación entre el concepto de impedancia y el de coeficiente de reflexión:

$$Z = Z_0 \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

$$\rho = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

Más concretamente, se usa la *impedancia normalizada*, para facilitar las cosas y usar una circunferencia de radio la unidad:

$$\bar{Z} = \frac{Z}{Z_0}$$

$$\bar{Z} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

$$\rho = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1}$$

Lo que hace esto es transformar la región de la impedancia en coordenadas cartesianas (plano infinito) en una circunferencia de radio 1, que es un recinto finito. Se trata de una transformación bilineal, como podemos observar en la figura (2.29), transformándose el plano Z en el plano ρ .

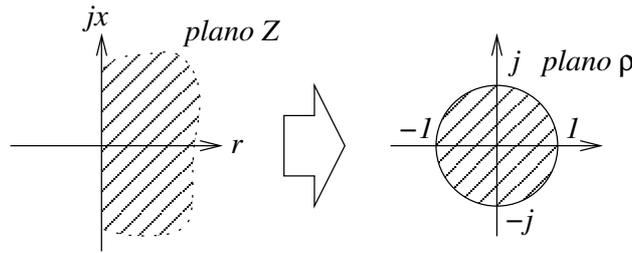


Figura 2.29: Transformación conforme del semiplano derecho (infinito) en el interior del círculo de radio unidad

En esta transformación hemos tenido en cuenta que la parte real de la impedancia es positiva en todo el plano (lo cual es bastante lógico). Escribimos por tanto la impedancia normalizada como parte real e imaginaria:

$$\bar{Z} = r + jx$$

Para cualquier $r \geq 0$, el recinto en que se transforma el semiplano derecho es el interior del círculo unidad:

$$\rho = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1} \Rightarrow |\rho| = \frac{\sqrt{(r-1)^2 + x^2}}{\sqrt{(r+1)^2 + x^2}} \leq 1$$

Es decir, que cualquier impedancia positiva se puede representar en un recinto circular de radio ≤ 1 .

En la carta de Smith podemos visualizar la evolución de la impedancia a lo largo de toda la línea. Su utilidad principal se encuentra en una línea de transmisión sin pérdidas. Esto es así porque la evolución del coeficiente de reflexión en una línea sin pérdidas es una variación de fase, con módulo constante, lo que se puede representar con facilidad sobre una circunferencia en coordenadas polares:

$$\rho(d) = \rho_L e^{-j2\beta d}$$

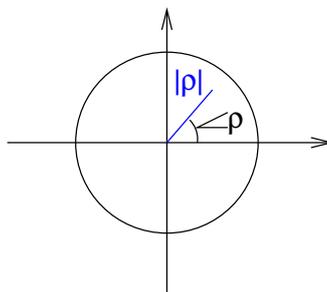


Figura 2.30: Representación del coeficiente de reflexión en coordenadas polares

La evolución del coeficiente de reflexión en una línea sin pérdidas, representado en la figura (2.30), es un arco en el sentido de las agujas del reloj, con el módulo constante como hemos mencionado antes. Para conocer el valor de la impedancia vista lo único que hay que hacer es superponer una rejilla sobre el diagrama. Eso es exactamente la carta de Smith.

2.3.2 Construcción de la carta de Smith

Para ver cómo se construye la carta de Smith, tenemos en cuenta la relación entre ρ y Z , y su división en partes real e imaginaria:

$$\bar{Z} = \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad \rho = \frac{\bar{Z}-1}{\bar{Z}+1}$$

$$\bar{Z} = r + jx \quad \rho = u + jv$$

Escribimos la impedancia vista en función de u y v :

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{1+\rho}{1-\rho} = \frac{1+u+jv}{1-u-jv} \\ &= \frac{1-u^2-v^2+jv(1-u+1+u)}{(1-u)^2+v^2} \\ &= \underbrace{\frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}}_r + j \underbrace{\frac{2v}{(1-u)^2+v^2}}_x \end{aligned}$$

Tomamos $r = cte$ y vemos en qué se transforma:

$$r = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} \Rightarrow r(1-u)^2 + rv^2 = 1-u^2-v^2$$

$$u^2(r+1) - 2ur + v^2(r+1) = 1-r \Rightarrow u^2 - 2u\frac{r}{r+1} + v^2 = \frac{1-r}{1+r}$$

Si sumamos $\frac{r^2}{(r+1)^2}$ en ambos términos llegamos a la siguiente expresión:

$$\boxed{\left(u - \frac{r}{r+1}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(r+1)^2}} \quad (2.63)$$

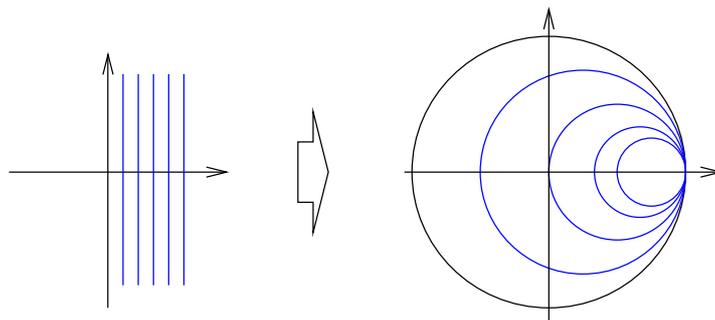


Figura 2.31: Transformación de la parte real de la impedancia en el coeficiente de reflexión en polares

Que no es otra cosa que la ecuación de una circunferencia de centro $(u, v) = \left(\frac{r}{r+1}, 0\right)$ y radio $R = \frac{1}{r+1}$. En la figura (2.31) vemos en color azul las distintas circunferencias que representan. Conforme aumenta r , disminuye el radio de las circunferencias y el centro se acerca más al contorno del círculo unidad.

Ahora tomamos $x = cte$, con lo que obtendremos la transformación de las rectas horizontales paralelas en el plano ρ :

$$x = \frac{2v}{(1-u)^2+v^2} \Rightarrow x(1-2u+u^2) + xv^2 = 2v$$

$$(u - 1)^2 + v^2 - \frac{2v}{x} = 0$$

A esto le sumamos $\frac{1}{x^2}$ en ambos términos, con lo que se llega a

$$\boxed{(u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}} \quad (2.64)$$

Que es una circunferencia de centro $(u, v) = \left(1, \frac{1}{x}\right)$ y radio $R = \left|\frac{1}{x}\right|$.

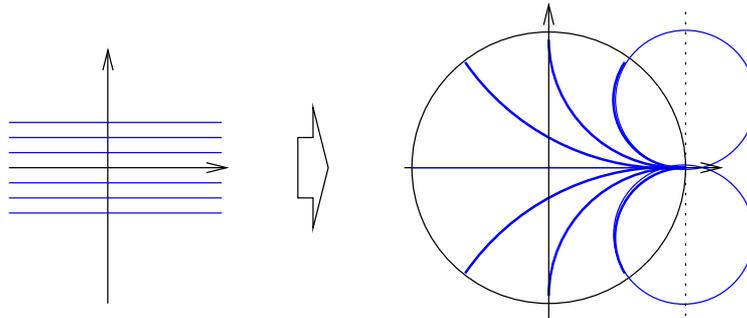


Figura 2.32: Transformación de la parte imaginaria de la impedancia en el coeficiente de reflexión en polares

En la figura (2.32) vemos esta representación, en la que las circunferencias tienen su centro en la línea de puntos y según aumenta el valor de x , disminuye el radio de las circunferencias y su centro se aproxima al punto $(1, 0)$.

La superposición de estas curvas y de las anteriores da lugar a la carta de Smith, que vemos representada de forma aproximada en la figura (2.33).

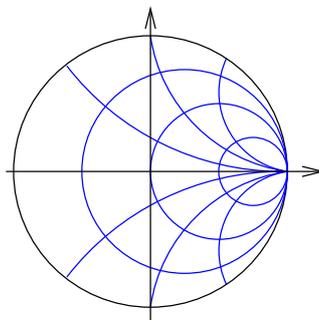


Figura 2.33: Carta de Smith

2.3.3 Puntos característicos de la carta de Smith

Vemos algunos detalles sobre la carta de Smith:

- ⊃ Todas las impedancias que sean reales están contenidas en el eje real ($x = 0$)
- ⊃ Todas las impedancias que caigan en el semicírculo superior son impedancias inductivas
- ⊃ Todas las impedancias que caigan en el semicírculo inferior son impedancias capacitivas
- ⊃ Todas las impedancias que caigan en el contorno de la circunferencia son reactivas puras ($r = 0$)

- ▷ El centro de la carta de Smith es $\rho = 0$, es decir, la impedancia vista es la característica de la línea $Z = Z_0$ ($\bar{Z} = 1$)
- ▷ El punto $(1, 0)$ corresponde a un coeficiente de reflexión $\rho = 1$, es decir, un circuito abierto ($Z = \infty$)
- ▷ El punto $(-1, 0)$ corresponde a un coeficiente de reflexión $\rho = -1$, es decir, un cortocircuito ($Z = 0$)

2.3.4 Uso básico de la carta de Smith

Vamos a ver algunos ejemplos sobre la carta de Smith que nos ayudarán a comprender su funcionamiento.

2.3.4.1 Representación de impedancias y admitancias

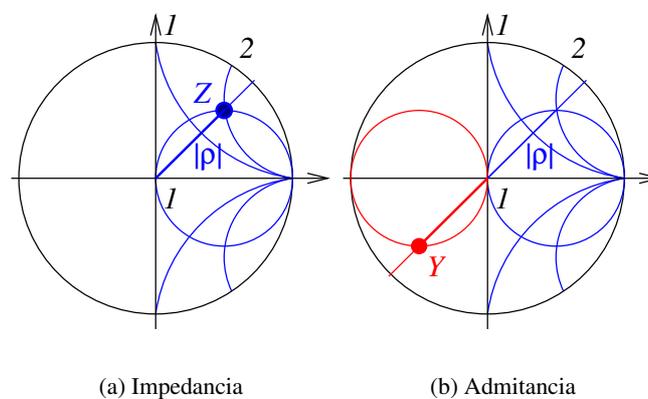


Figura 2.34: Carta de Smith para $\bar{Z} = 1 + j2$ y $\bar{Y} = 1/\bar{Z}$

Representamos la siguiente impedancia en la carta de Smith

$$Z = 50 + j100$$

Siendo la impedancia característica

$$Z_0 = 50\Omega$$

Se tiene la siguiente impedancia normalizada

$$\bar{Z} = 1 + j2$$

En la figura (2.34) vemos las representaciones respectivas para impedancia normalizada \bar{Z} y admitancia normalizada \bar{Y} .

Para representar la impedancia, se mira la parte real y se representa en el círculo que vimos que corresponde a la parte real de la impedancia, es decir, los que cruzan el diámetro horizontal de la carta de Smith, y la parte imaginaria igual para los círculos que cruzan el perímetro de la carta de Smith.

En cuanto a la admitancia, es fácil ver que simplemente lo que se hace es girar 180° la representación de la impedancia:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} = \frac{1 + (-\rho)}{1 - (-\rho)}$$

Ya que lo que se representa en la carta de Smith es el coeficiente de reflexión.

2.3.4.2 Admitancias en paralelo

Tenemos una admitancia formada por una conductancia \bar{Y} y una susceptancia j en paralelo. La conductancia es la misma que en el ejemplo anterior:

$$\bar{Y} = \frac{1}{1 + j2} = 0.2 - j0.4$$

$$\bar{Y}_T = \bar{Y} + j = 0.2 + j0.6$$

En lo que consiste este ejemplo es en sumar admitancias (están en paralelo), para lo que nos movemos por la circunferencia de parte real constante.

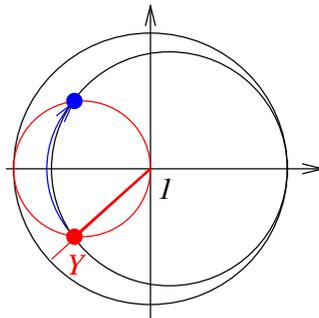


Figura 2.35: Diagrama de Smith para una admitancia $\bar{Y} = 0.2 - j0.4$ con una susceptancia en paralelo de valor j

Esto tiene gran utilidad para calcular la impedancia de entrada de redes LC en escalera. Para ese caso, Z_0 sería un parámetro de referencia o de normalización, ya que no se trata con líneas de transmisión. Es un caso de aplicación de la carta de Smith para problemas de circuitos.

De la misma forma que lo hemos visto para la asociación de admitancias en paralelo, se puede hacer para impedancias en serie, usando por supuesto la representación de impedancias en lugar de la de admitancias.

2.3.4.3 Coeficiente de reflexión a lo largo de una línea de transmisión

Podemos conocer la evolución del coeficiente de reflexión a lo largo de una línea de transmisión usando la carta de Smith. Para ello, nos fijamos en la expresión para el coeficiente de reflexión:

$$\rho(d) = \rho_L e^{-j2\beta d}$$

Como podemos ver, se trata de una línea sin pérdidas, luego veremos cómo es para una línea con pérdidas.

Lo que ocurre al multiplicar por $e^{-j2\beta d}$ es que se resta $2\beta d$ al argumento del coeficiente de reflexión en la carga, es decir, que se giran $2\beta d$ radianes en el sentido de las agujas del reloj, como podemos ver en la figura (2.36), en la que hemos hecho $d = l$ para calcular el coeficiente de reflexión a la entrada, y con él la impedancia de entrada a la línea.

Para buscar el ángulo que hay que recorrer, en el exterior de la circunferencia, el arco marcado en la carta como “longitudes de onda hacia el generador” (WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR o abreviadamente WTG). Se recorrerá la distancia correspondiente al número de longitudes de onda (fraccionario generalmente) que representa la longitud de la línea. En caso de que la línea sea mayor que la mitad de la longitud de onda, se dará la vuelta completa y se seguirá girando.

Por tanto, podemos decir que la línea tiene un periodo de $\lambda/2$:

$$2\theta = 2\pi \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \pi$$

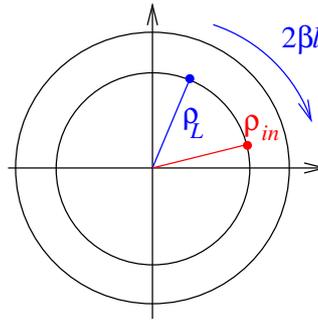


Figura 2.36: Coeficiente de reflexión a lo largo de la línea de transmisión terminada

$$l = \frac{\lambda}{2}$$

También podemos buscar Z_L a partir de Z_{in} , sin más que girar en el sentido contrario a las agujas del reloj y usar la escala de fracciones de longitud de onda que indica “hacia la carga” (*WAVELENGTHS TOWARD LOAD*, o *WTL*).

2.3.4.4 Precisión de la carta de Smith

Como podemos ver en la carta de Smith, lo que hay es una malla de círculos, con huecos entre ellos. Hay que tener en cuenta que podemos obtener impedancias y coeficientes de reflexión que caigan en medio de alguno de estos huecos, por lo que no sabremos con certeza qué valor es.

La variación del valor de impedancia es dependiente de l , y será mucho más sensible a variaciones de l en las zonas en las que $\rho \simeq 1$, es decir, donde hay más densidad de círculos.

La precisión la marca el escalado de las dos magnitudes que se miden en la carta: amplitud o módulo y fase.

El módulo del coeficiente de reflexión se mide con paso 0.02, por lo que esa es su precisión. En cuanto a la fase, dado que se mide en múltiplos de la longitud de onda, y se puede observar que el paso es de 0.002, la precisión en fase es de $\frac{\lambda}{500} = 0.002\lambda$.

Un número para comprobar que esta precisión no es precisamente mala: un cable coaxial a $1GHz$ tiene una longitud de onda de aproximadamente $20cm$, por lo que su precisión será de $0.4mm$. No es posible diseñar un coaxial con tanta precisión.

De todas formas, en caso de necesitar más precisión se puede hacer una ampliación de la carta de Smith.

2.3.4.5 Leer el coeficiente de onda estacionaria en la carta de Smith

Recordemos que la expresión del coeficiente de onda estacionaria en función del coeficiente de reflexión es

$$s = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

Para una línea de transmisión sin pérdidas.

En la figura (2.37) se indican los puntos P_m y P_M . El corte del círculo de Z_L con el eje real representa impedancias resistivas puras, y concretamente dichos puntos representan un mínimo y un máximo del diagrama de onda estacionaria, respectivamente.

Por tanto, lo que se tiene en la carta de Smith es que el punto P_M indica s , mientras que el punto P_m indica $1/s$.

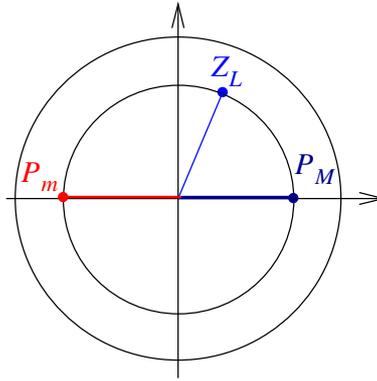


Figura 2.37: Coeficiente de onda estacionaria en la carta de Smith

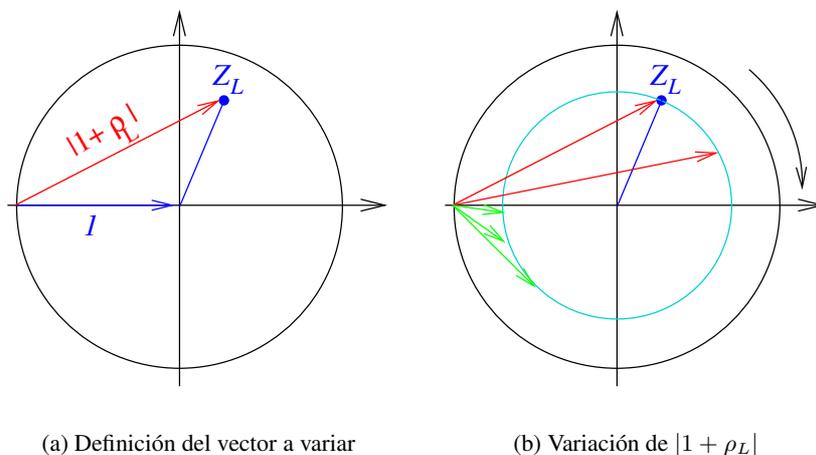
¿Por qué? Veamos la expresión del coeficiente de reflexión cuando la impedancia es resistiva pura (ρ no tiene parte imaginaria):

$$\rho = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = \frac{r_L - 1}{r_L + 1} = \frac{s - 1}{s + 1}$$

Donde hemos normalizado R_L como $r_L = \frac{R_L}{R_0}$.

Por tanto, $s = r_L = R_L/R_0$, por lo que el valor del círculo que pasa por el punto P_M es el valor del coeficiente de onda estacionaria.

En caso de encontrarnos cerca de la zona crítica ($\rho \simeq 1$), se mira $1/s$ en lugar de s para calcularlo.



(a) Definición del vector a variar

(b) Variación de $|1 + \rho_L|$

Figura 2.38: Variación del coeficiente de onda estacionaria en una línea de transmisión

Ahora podemos explicar por qué los mínimos del coeficiente de onda estacionaria son más abruptos que los máximos. Observamos cómo varía V a lo largo de una línea de transmisión terminada, es decir, miramos la variación de $|1 + \rho_L|$, que no es más que la variación de la fase de ρ_L . En la figura (2.38) vemos cómo varía el coeficiente de onda estacionaria conforme nos movemos por la línea. En rojo se ve la zona próxima a los máximos, en la que se observa que pequeños desplazamientos implican variaciones pequeñas de la longitud del vector. Por contra, la línea verde que representa la zona cercana a los mínimos, varía más rápidamente con pequeños desplazamientos.

Será más abrupto cuanto más reflexión haya. El caso extremo es cuando $\rho_L = 1$, ya que los mínimos son nulos y los máximos valen 2.

Comentarios sobre el coeficiente de onda estacionaria:

- ⤷ Si la carga con la que se termina la línea es inductiva, lo primero que nos encontramos en el diagrama de onda estacionaria es un máximo, ya que estamos en el semicírculo superior y nos movemos en el sentido de las agujas del reloj.
- ⤷ La distancia entre dos máximos o mínimos consecutivos es $\lambda/2$, lo que se recorre si le damos la vuelta entera a la carta de Smith.
- ⤷ La distancia entre un máximo y un mínimo es $\lambda/4$, que es media vuelta a la carta de Smith.

Podemos distinguir los diagramas de onda estacionaria de tensión y corriente, teniendo en cuenta que el de tensión es de la forma $|1 + \rho|$ y el de corriente $|1 - \rho|$. Lo que ocurre es que están desfasados, y ese desfase varía conforme nos alejamos de la carga, a menos que la carga sea reactiva pura, en cuyo caso el desfase es constante e igual a 90° .

2.3.5 Carta de Smith modificada

Antes hemos visto que para calcular la admitancia a partir de la impedancia de carga lo único que hay que hacer es girar 180° la recta del coeficiente de reflexión.

Esto se puede hacer innecesario si duplicamos la carta de Smith, girándola 180° como se ve en la figura (2.39). Se suelen utilizar 2 colores para distinguir si estamos mirando impedancias o admitancias.

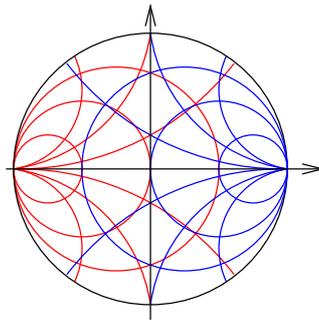


Figura 2.39: Carta de Smith modificada. En azul las curvas de impedancias, y en rojo las de admitancias

La ventaja de usarla es que se evita girar 180° para cambiar de impedancias a admitancias, ya que al marcar una impedancia podemos ver la admitancia en el mismo punto, y viceversa.

Sin embargo, nosotros usaremos la carta de Smith normal.

2.3.6 Carta de Smith y líneas de transmisión con pérdidas

Hemos visto que la evolución del coeficiente de reflexión en una línea sin pérdidas es sobre un círculo de radio constante. Cuando se producen pérdidas, disminuye el coeficiente de reflexión según nos acercamos a la entrada de la línea, ya que este varía de la forma

$$\rho_{in} = \rho_L e^{-2\alpha l} e^{-j2\beta l}$$

Lo que se refleja en la carta de Smith como una espiral.

Para no tener que dibujar una espiral, con los problemas de precisión que ello conlleva, lo que se hace es moverse de la misma forma que si no hubiera pérdidas, con el radio constante, y al llegar al punto deseado se usa la escala auxiliar mirando la línea de atenuación ($ATTEN [dB]$), habiendo calculado previamente el valor de la atenuación.

Habrà que sumarle la atenuación introducida por la línea a la que ya hay. Se proyecta entonces el punto inicial que corta al eje horizontal sobre la recta de atenuación. Luego se le suma la atenuación producida por la línea y se vuelve a proyectar sobre el eje horizontal de la carta de Smith, obteniéndose el nuevo módulo del coeficiente de reflexión.

2.3.7 Carta de Smith comprimida

Al definir la carta de Smith y construirla especificamos que la parte real de la impedancia era positiva. Eso implicaba que sólo considerábamos el semiplano derecho de las impedancias, que se transformaba en el interior del círculo de radio unidad.

Ahora tenemos en cuenta las **impedancias con parte real negativa**.

Lo que ocurre con el semiplano izquierdo es que se transforma en el exterior del círculo de radio unidad. Por tanto, el plano infinito se transforma en otro plano infinito.

Se define la **carta de Smith comprimida** como aquella que considera impedancias con parte real negativa, pero no todas, sino hasta un límite. Concretamente se define para $|\rho| \leq k$ donde k puede ser mayor que 1.

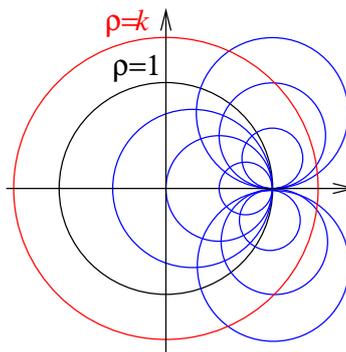


Figura 2.40: Carta de Smith comprimida

En la figura (2.40) vemos la generación de la carta de Smith comprimida, en este caso se deben tomar los círculos hasta el corte con el círculo exterior ($\rho = k$), no hasta el de radio unidad.

2.4 La línea de transmisión como elemento de circuito

Ahora no vamos a ver la línea de transmisión como elemento de interconexión, sino para sintetizar elementos de circuito.

Tenemos varias formas de realizar esto, y vamos a verlas a continuación.

2.4.1 Línea corta

Trabajamos ahora con tramos de línea de transmisión sin pérdidas eléctricamente cortas. Con ello conseguiremos sintetizar inductancias y capacidades.

Recordemos que vimos antes el modelado de una línea de transmisión como un **bipuerto** en T. Este bipuerto estaba formado por dos impedancias Z en serie y una admitancia Y en paralelo, de los cuales su comportamiento en frecuencia no se podía sintetizar con un número finito de elementos circuitales. Sin embargo se podía aproximar en el caso de $l \ll \lambda$:

$$Z \simeq Z_0 \gamma \frac{l}{2} = j\omega L \frac{l}{2}$$

$$Y \simeq \frac{\gamma}{Z_0} l = j\omega C l$$

Podemos ver que según el valor de Z_0 , predominará un comportamiento u otro:

- Si Z_0 es muy elevada, entonces predomina la componente inductiva, por lo que la línea se simplifica a un inductor equivalente en serie de valor

$$L_{eq} = Ll$$

- Si por el contrario Z_0 es baja, predominará la componente capacitiva, en cuyo caso obtenemos una capacidad equivalente en paralelo de valor

$$C_{eq} = Cl$$

En la figura (2.41) vemos ambos comportamientos reflejados.

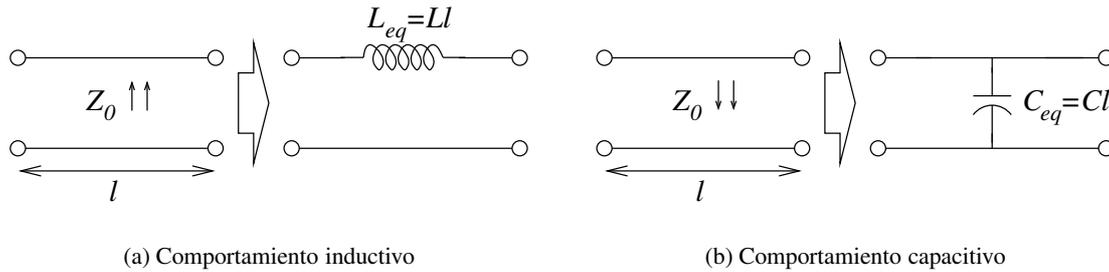


Figura 2.41: Comportamientos (a) inductivo y (b) capacitivo para la línea corta

Es obvio que los valores de L_{eq} y C_{eq} no pueden ser cualquiera, ya que se debe cumplir en todo momento $l \ll \lambda$. Además, vemos que con la línea corta sólo podemos obtener capacidades en paralelo e inductancias en serie.

Ejemplo 2.2:

Podemos querer implementar un filtro paso bajo a frecuencias de microondas. Una opción perfectamente válida para es diseñarlo en principio como se haría para bajas frecuencias, con lo que se obtendría una red LC en escalera como la de la figura (2.42).

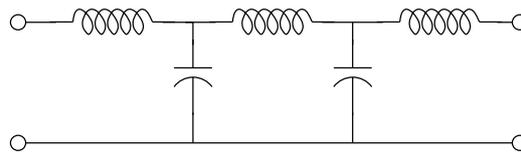


Figura 2.42: Filtro paso bajo como red LC en escalera

Y luego lo que se haría es usar líneas de transmisión para sintetizar los elementos.

Si usamos cable coaxial para implementarlo, la impedancia característica es

$$Z_0 = \eta k = \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Donde a es el radio del conductor interior y b el del conductor exterior. Mantenemos b constante, por lo que tendremos que intercalar secciones de cable coaxial de distintas longitudes y distintas secciones de conductor interior, como vemos en la figura (2.43).

Según el valor de inductancia o capacidad, cada sección tendrá una longitud dada.

Hay que tener cuidado con los modos de orden superior que puedan aparecer.

También podemos ver la implementación del filtro en tecnología microstrip, donde Z_0 depende de la anchura de la pista W . Si W es grande, Z_0 es pequeña y viceversa.

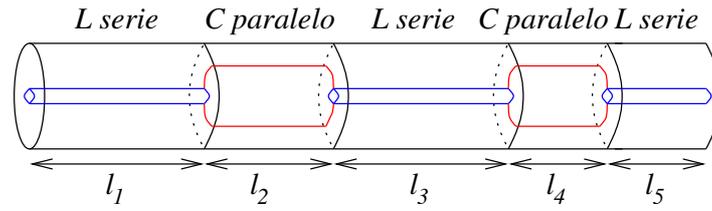
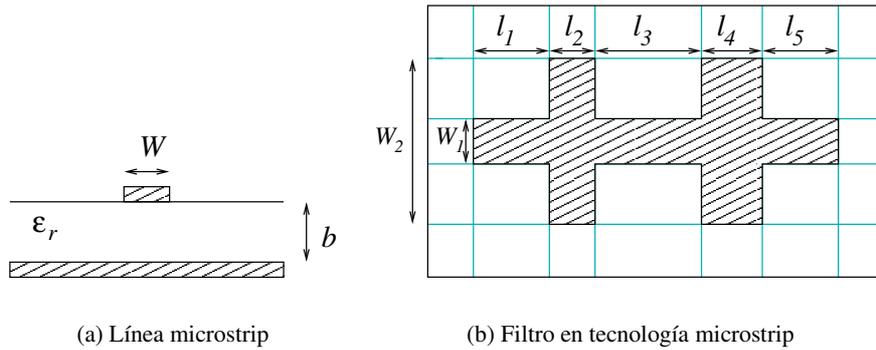


Figura 2.43: Implementación del filtro paso bajo con tecnología coaxial



(a) Línea microstrip

(b) Filtro en tecnología microstrip

Figura 2.44: (a) Esquema de la línea microstrip y (b) Implementación del filtro paso bajo en tecnología microstrip

En la figura (2.44) está la implementación del filtro en tecnología microstrip, vista desde arriba. También vemos el esquema de la línea microstrip, formada por un plano conductor inferior a masa, una capa de dieléctrico ϵ_r , de altura b y la pista de anchura W .



2.4.2 Tramos de línea de transmisión terminada

Vamos a usar de nuevo líneas sin pérdidas.

Podemos sintetizar el comportamiento en frecuencia que queramos con una línea de transmisión terminada en una impedancia Z_L . Nosotros vamos a usar la línea de transmisión terminada en cortocircuito o en circuito abierto.

En este caso, estamos usando la línea como **monopuerto** (o bipolo). Por tanto, la caracterizamos por su impedancia, $Z_{in}(f)$.

2.4.2.1 Línea de transmisión terminada en cortocircuito

Recordemos que ya calculamos la impedancia de entrada a una línea terminada en cortocircuito, y que era

$$Z_{in} = jZ_0 \operatorname{tg} \theta$$

Siendo $\theta = \beta l$ la longitud eléctrica de la línea.

Representaremos la impedancia normalizada a Z_0 ,

$$\bar{Z}_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_0} = j \operatorname{tg} \beta l$$

Donde la dependencia con la frecuencia está en la tangente:

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{\omega}{v} l$$

Siendo v la velocidad de propagación de las ondas, que, dado que no estamos en el vacío, no será c , sino

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

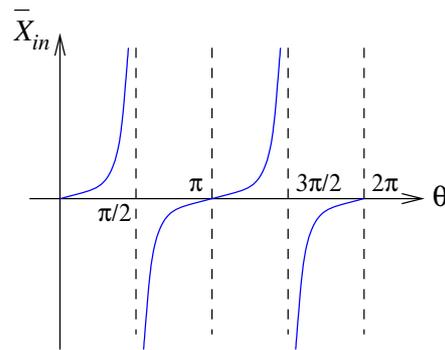


Figura 2.45: Comportamiento con la frecuencia de la reactancia a una línea de transmisión terminada en cortocircuito

En la figura (2.45) vemos la evolución de la reactancia de entrada normalizada \bar{X}_{in} en función de θ . Recordemos que $\bar{Z}_{in} = j\bar{X}_{in}$.

Observamos que hay zonas en las que es una reactancia positiva y otras negativa:

- ▷ Para $X_{in} > 0$ el comportamiento se asemeja a un inductor. La diferencia con un inductor es que su evolución con la frecuencia no es lineal, sino que sigue una función tangente. Sin embargo, para zonas cercanas a $\theta = 0$ o también en tramos cortos de θ , se puede aproximar como lineal. Para $\theta < \pi/2$

$$L_{eq} = \frac{X_{in}}{\omega} = \frac{Z_0 \operatorname{tg} \theta}{\omega}$$

- ▷ Para $X_{in} < 0$, el comportamiento es capacitivo, y de la misma forma que antes, tiene evolución tangencial.
- ▷ Si $X_{in} = 0$, según el valor de θ se comportará de una forma u otra:
 - ➡ Para $\theta = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ se comporta como un circuito resonante LC paralelo, en el que hay múltiples frecuencias de resonancia.
 - ➡ Para $\theta = \pi, 2\pi, \dots$ se comporta como un circuito resonante LC serie.

Por tanto, podemos concluir que para una línea de transmisión corta en comparación con la longitud de onda, $l \ll \lambda$, y una longitud eléctrica pequeña, $\theta \ll 1$, el comportamiento de la línea se puede considerar como lineal con la frecuencia y por tanto se puede modelar como un inductor de valor

$$L_{eq} = Ll$$

Siendo entonces la impedancia de entrada

$$Z_{in} \simeq jZ_0\theta l \simeq j\sqrt{\frac{L}{C}}\omega\sqrt{LC}l = j\omega Ll$$

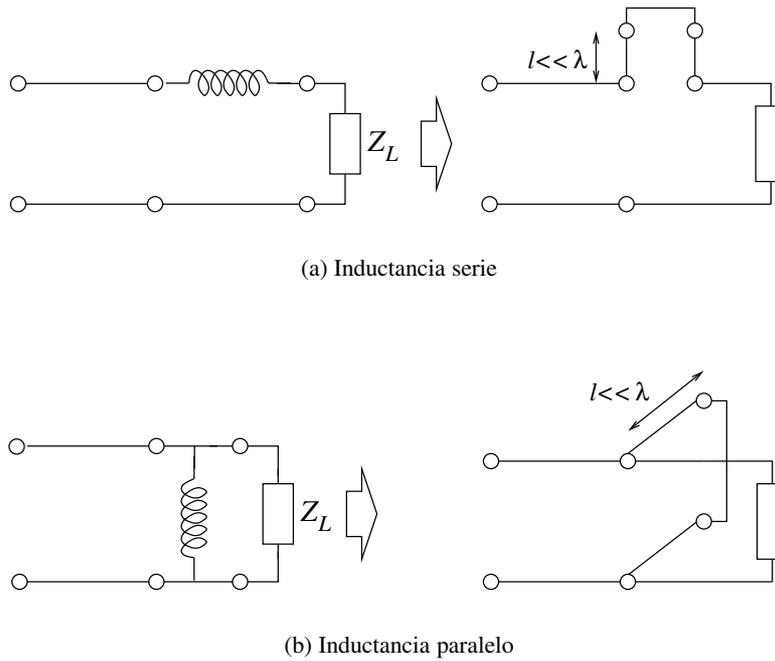


Figura 2.46: Inductores en (a) serie y (b) paralelo sintetizados como línea de transmisión terminada en cortocircuito

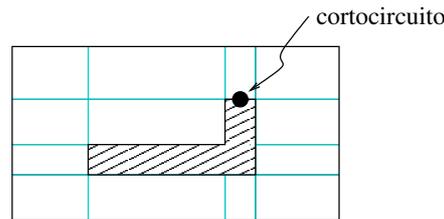


Figura 2.47: Inductancia en paralelo con microstrip

Este inductor tiene la ventaja sobre el que obteníamos para una línea corta que se puede insertar tanto en serie como en paralelo. Podemos ver en la figura (2.46) cómo se pueden sintetizar inductancias en serie y paralelo con línea de transmisión terminada en cortocircuito.

En microstrip sólo se podría conectar en paralelo, ya que es imposible la conexión en serie de una línea de transmisión terminada, por lo que habría que hacerlo con línea corta.

En la figura (2.47) podemos ver cómo se haría la conexión en paralelo de un inductor con línea microstrip terminada en cortocircuito.

2.4.2.2 Línea de transmisión terminada en circuito abierto

Si recordamos del análisis de la línea de transmisión terminada que hicimos, este caso se puede modelar como una admitancia de entrada

$$Y_{in} = jY_0 \operatorname{tg} \theta$$

Siendo $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$.

La representación con la frecuencia de Y_{in} será la misma que en el caso de Z_{in} del apartado anterior. Vemos en la figura (2.48) la representación de $\overline{B}_{in} = \frac{B_{in}}{Y_0}$, donde B representa la susceptancia, es decir: $Y = jB$.

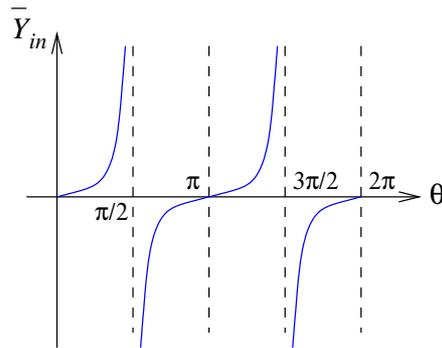


Figura 2.48: Representación de la susceptancia de una línea terminada en circuito abierto

Podemos interpretar la gráfica de la misma forma que antes:

- ⊃ Para $X_{in} > 0$ el comportamiento se asemeja a una capacidad
- ⊃ Para $X_{in} < 0$, el comportamiento es inductivo.
- ⊃ Si $X_{in} = 0$, según el valor de θ se comportará de una forma u otra:
 - ➡ Para $\theta = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ se comporta como un circuito resonante LC serie.
 - ➡ Para $\theta = \pi, 2\pi, \dots$ se comporta como un circuito resonante LC paralelo.

Vemos por tanto que se trata de un comportamiento dual al anterior.

Si la longitud de la línea es muy pequeña en comparación con la longitud de onda, $l \ll \lambda$, entonces se aproxima a una capacidad, en el margen de frecuencias en el que se cumpla esa relación.

$$Y_{in} \simeq jY_0\theta = j\omega Cl = j\omega C_{eq}$$

En la figura (2.49) vemos las líneas de transmisión que resultarían para modelar una capacidad en serie y otra en paralelo, de la misma forma que lo vimos para la línea de transmisión terminada en cortocircuito.

De la misma forma, para microstrip se podría hacer sólo en paralelo. El esquema es el mismo que en el caso anterior, pero sin el punto que representa el cortocircuito.

2.4.3 Transformador en $\lambda/4$

Lo que tenemos ahora es una línea sin pérdidas terminada con Z_L de longitud $l = \lambda/4$.

En este caso, la impedancia de entrada a la línea es

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

Por tanto la impedancia normalizada será

$$\bar{Z}_{in} = \frac{1}{\bar{Z}_L}$$

Esto es, se trata de un **inversor de impedancias**.

También se puede usar como red adaptadora de impedancias reales.

Entonces, el comportamiento que se consigue con esto es, básicamente:

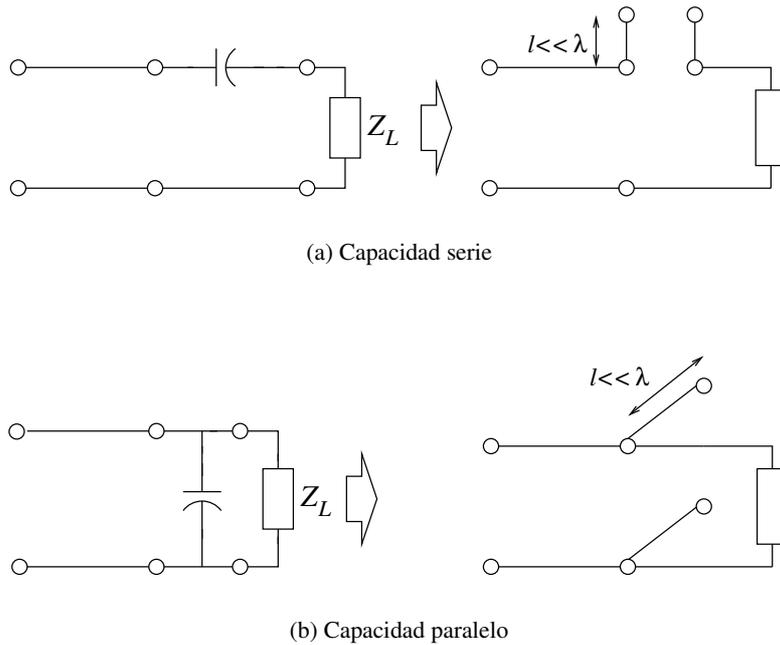


Figura 2.49: Capacidades en (a) serie y (b) paralelo sintetizados como línea de transmisión terminada en circuito abierto

- ⇒ Un cortocircuito se convierte en un circuito abierto
- ⇒ Un circuito abierto se convierte en un cortocircuito
- ⇒ Una red serie se transforma en una red paralelo
- ⇒ Una red paralelo se transforma en una red serie

El comportamiento para el cortocircuito y el circuito abierto se puede mirar con la línea de transmisión terminada en cortocircuito o circuito abierto, sin más que hacer $l = \lambda/4$, que hace que la longitud eléctrica de la línea sea

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

2.4.4 Ventana en $\lambda/2$

Ahora tenemos el mismo caso que antes: línea de transmisión sin pérdidas terminada en una impedancia Z_L pero de longitud $l = \lambda/2$.

Ahora lo que ocurre es que la impedancia de entrada es

$$Z_{in} = Z_L$$

Estos dos últimos casos que hemos visto (transformador en $\lambda/4$ y ventana en $\lambda/2$) usan la línea de transmisión como bipuerto. Además, esto lo podríamos estudiar también con la carta de Smith.

2.5 Características de las líneas de transmisión más comunes

Vamos a ver las características de algunas de las líneas de transmisión que existen. Veremos por ejemplo:

1. Cable coaxial
2. Línea biplaca
3. Stripline
4. Microstrip

A estas se puede añadir la línea bifilar, que sin embargo es sólo útil a frecuencias muy bajas, por lo que no la estudiaremos. Las tres primeras se pueden considerar como líneas de transmisión estrictamente hablando, ya que se propagan sólo modos TEM.

El caso de la microstrip es más complejo, ya que aunque hay dos conductores, también hay dos dieléctricos (aire y separación entre conductores), por lo que el problema es no homogéneo y para satisfacer las condiciones de contorno debe haber componentes longitudinales. Por tanto, no sólo se propagan modos TEM. Sin embargo, es la que más se usa hoy en día.

Necesitaremos conocer los siguientes datos sobre la línea de transmisión para poder caracterizarla:

- Parámetros primarios (R, L, C, G) y secundarios (Z_0, γ_0). Se abordará el problema obteniendo en primer lugar la capacidad del problema electrostático, para luego calcular la constante geométrica k , obteniendo a continuación L, G, β y α_d . Luego se estimará R para obtener la constante de atenuación debida a los conductores, α_c .
- Frecuencia de corte del primer modo superior, que marcará la frecuencia máxima a la que podrá funcionar la línea sin que haya perturbaciones en su comportamiento.

No vamos a ver los desarrollos completos para obtener estos datos, sino los resultados definitivos.

2.5.1 El cable coaxial

Recordamos el problema que desarrollamos en Electromagnetismo II.

Un cable coaxial, como vemos en la figura (2.50), es una estructura cerrada por conductor perfecto, por lo que no hay radiación al exterior.

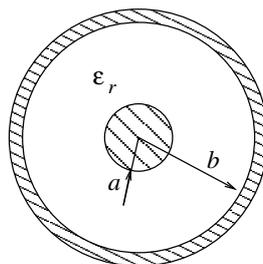


Figura 2.50: Cable coaxial

Calculamos la capacidad del problema electrostático. Omitimos todo el proceso, tras el cual se obtiene finalmente

$$C = \frac{2\pi\epsilon'}{\ln \frac{b}{a}} \quad F/m \quad (2.65)$$

Siendo la constante dieléctrica del medio entre los dos conductores $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$.

Dado que

$$C = \frac{\epsilon'}{k}$$

podemos extraer k :

$$k = \frac{\epsilon'}{C} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi} \quad (2.66)$$

Calculamos ahora la resistencia. La resistencia que aparece es debida al efecto pelicular: las corrientes fluyen por la cara interna del conductor exterior y por la cara externa del conductor interior. Una resistencia superficial en un conductor de conductividad σ es

$$R_s = \frac{l}{\sigma 2\pi r \delta_s} \quad \Omega$$

Siendo l la longitud del conductor, δ_s la profundidad de penetración y r el radio del conductor. Por tanto, podemos calcular la resistencia del coaxial como suma de dos resistencias:

$$R = R_{\text{conductor interior}} + R_{\text{conductor exterior}} = \frac{1}{2\pi\sigma a\delta_s} + \frac{1}{2\pi\sigma b\delta_s}$$

Quedando finalmente

$$R = \frac{a+b}{2\pi ab\sigma\delta_s} \quad \Omega/m \quad (2.67)$$

Ya tenemos por tanto todos los parámetros primarios y secundarios:

⇒ **Parámetros primarios:**

$$G = \frac{\omega\epsilon''}{k} = \omega \frac{2\pi\epsilon''}{\ln \frac{b}{a}} \text{tg } \delta \quad S/m \quad (2.68)$$

$$L = \mu k = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad H/m \quad (2.69)$$

Siendo $\text{tg } \delta$ la tangente de pérdidas del dieléctrico.

⇒ **Parámetros secundarios:**

$$Z_0 = \eta k = 60 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} \quad \Omega \quad (2.70)$$

$$\gamma_0 = \alpha + j\beta \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon'} \quad \text{rad/m} \\ \alpha_d = 27.3 \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \frac{\text{tg } \delta}{\lambda_0} \quad \text{dB/m} \\ \alpha_c = 13.6 \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \frac{\delta_s (1 + \frac{b}{a})}{\lambda_0 b \ln \frac{b}{a}} \quad \text{dB/m} \end{array} \right.$$

Donde vemos que β no depende de la geometría, α_d no depende de la frecuencia y λ_0 es la longitud de onda en el vacío:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f}$$

⇒ **Frecuencia de corte del primer modo superior:** el primer modo superior es el TE_{11} . Su frecuencia de corte está dada por la siguiente expresión

$$f_{cTE_{11}} = \frac{c}{\pi(a+b)\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \quad (2.71)$$

Subir la frecuencia de corte implica hacer más pequeño el cable, lo cual a veces no es posible, ya que cuanto más pequeño es, menos potencia puede soportar.

En la práctica los modos superiores están al corte, porque se trabaja a frecuencias por debajo de la de corte. Sin embargo, hay que considerar su influencia, que se reduce a un efecto reactivo en las discontinuidades y en las fuentes. Sobre todo por el hecho de que se producen fenómenos de interferencia debidos a la superposición de varios modos propagándose con distintas constantes de propagación.

En la figura (2.51) vemos la evolución con la frecuencia de la potencia en un cable coaxial, medida con un medidor de potencia que sólo capta el modo TEM. Se observan valles a frecuencias a partir del gigahertzio, que corresponden a las interferencias de los modos superiores.

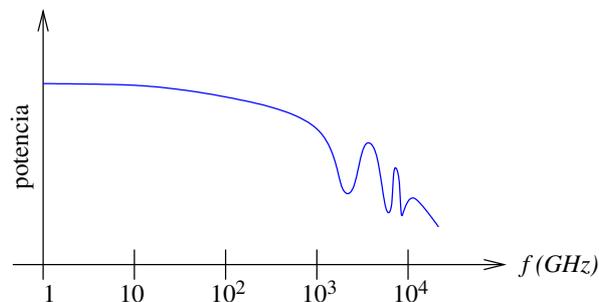


Figura 2.51: Evolución de la potencia en un coaxial con la frecuencia

2.5.2 La línea biplaca

Vemos su esquema en la figura (2.52). No se usa en la práctica, pero es sencilla de estudiar y nos ayudará a comprender la stripline y la microstrip.

Para el caso de $w \gg b \gg t$, tenemos las líneas de campo que vemos en la misma figura. Entonces, se puede aproximar el problema como un condensador de placas paralelas, y podemos calcular fácilmente su capacidad como

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad F$$

Siendo A el área de las placas y d la distancia entre ellas.

En la biplaca calculamos la capacidad por unidad de longitud, que quedará

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{w}{b} \quad F/m \quad (2.72)$$

Y la constante geométrica

$$k = \frac{b}{w}$$

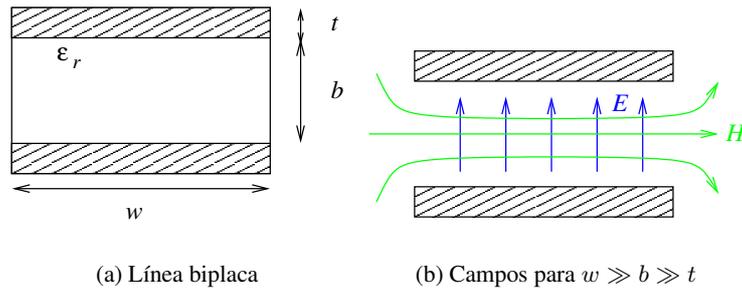


Figura 2.52: (a) Línea biplaca y (b) Campos en el caso de $w \gg b \gg t$

Estimamos ahora la resistencia. Ahora la resistencia superficial es la de un conductor plano:

$$R_s = \frac{l}{\sigma w \delta_s} \quad \Omega$$

Y dado que ambas placas son iguales, la resistencia será el doble, dividida por la longitud:

$$R = \frac{2}{\sigma w \delta_s} \quad \Omega/m \quad (2.73)$$

⇒ **Parámetros primarios:**

$$G = \frac{\omega \epsilon_r \epsilon_0 w}{b} \operatorname{tg} \delta \quad S/m \quad (2.74)$$

Si el dieléctrico no tiene pérdidas ($\epsilon'' = 0$), entonces la tangente de pérdidas es $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_r \epsilon_0}$, por lo que

$$G = \frac{\sigma w}{b} \quad S/m \quad (2.75)$$

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{b}{w} \quad H/m \quad (2.76)$$

⇒ **Parámetros secundarios:**

$$Z_0 = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{b}{w} \quad \Omega \quad (2.77)$$

$$\alpha_c = 27.3 \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \frac{\delta_s}{\lambda_0} \frac{1}{b} \quad dB/m \quad (2.78)$$

La constante de fase y la de atenuación debida al dieléctrico es la misma que en el coaxial, ya que no dependen de la geometría.

Vemos que cuanto mayor sea la sección transversal, menos pérdidas debidas a los conductores. Sin embargo, no se puede hacer todo lo grande que se quiera, ya que se debe seguir cumpliendo $w \gg b$. Y además, el valor de b condiciona la frecuencia de corte del modo superior, como vemos a continuación.

⇒ **Frecuencia de corte del modo superior:** en este caso es

$$f_c = \frac{c}{2b\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (2.79)$$

En este caso, las frecuencias de corte de los modos TE y TM son la misma. Esta es la frecuencia de los primeros modos TE y TM, TE_1 y TM_1 . La de cualquier modo TE_n o TM_n es

$$f_{cn} = n \frac{c}{2b\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

2.5.3 Stripline

Se usa como línea de transmisión para circuitos integrados de microondas, por la posibilidad de fabricarla con procesos litográficos. Es un tipo de línea planar, igual que la microstrip. Vemos su geometría en la figura (2.53). También vemos las líneas de campo eléctrico. Está formada por dos placas paralelas que encierran a una placa estrecha. Las dos placas exteriores están al mismo potencial, y se las llama *plano de tierra*.

Esta línea tiene una solución analítica complicada, por lo que se suelen dar los parámetros en forma gráfica o con expresiones analíticas aproximadas.

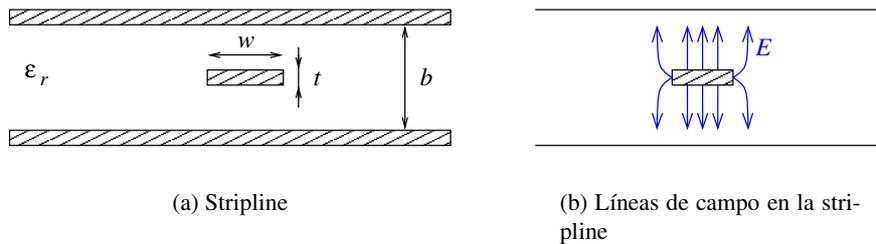


Figura 2.53: (a) Stripline y (b) Líneas de campo

Una nota de diseño: con el objeto de evitar los modos TE y TM, se colocan unos tornillos entre los planos de masa, como se observa en la figura (2.54). Se tienen que colocar de forma que no perturben la configuración del campo alrededor de la tira (límite inferior de d , la distancia entre tornillos) y para que la frecuencia de corte del primer modo superior sea elevada (límite superior de d , cuando menor es, mayor la frecuencia de corte). También interesa una distancia longitudinal entre tornillos, que por lo general será de $\lambda/8$.

Otra forma de reducir los modos TE y TM es diseñar la stripline de forma que la separación entre los planos de masa sea menor de $\lambda/4$.

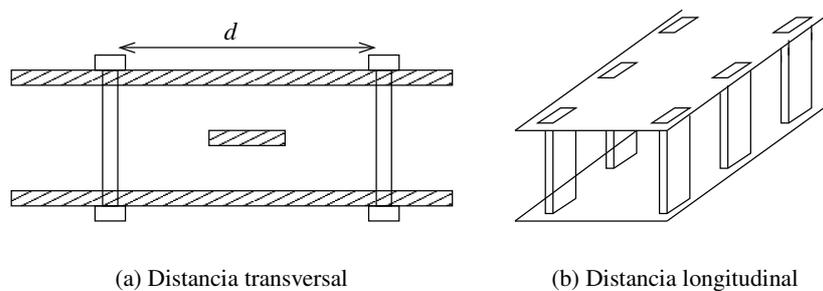


Figura 2.54: Tornillos para anular los modos superiores, mostrando las distancias (a) transversal y (b) longitudinal

2.5.3.1 Análisis aproximado

Se puede hacer una aproximación al análisis de la stripline considerando una pista ancha en comparación con la separación de las placas: $w \gg b$. Entonces se puede considerar la stripline como la conexión en paralelo de dos líneas biplaca.

En ese caso, la solución al problema electrostático es

$$C_{biplaca} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{2w}{b - t}$$

Dado que hemos considerado el espesor de la tira (t). Y dado que se trata de dos capacidades en paralelo,

$$C = 2C_{bipolara} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{4w}{b-t} \quad F/m \quad (2.80)$$

Por tanto, la constante geométrica es

$$k = \frac{b-t}{4w}$$

Y la impedancia característica

$$Z_0 = \eta \frac{1 - \frac{t}{b}}{\frac{4w}{b}} \quad (2.81)$$

Recordemos que esto es una aproximación que sólo es válida cuando $w \gg b$, por lo que en caso de hacer los números para relaciones w/b no muy grandes, los resultados no son ni mucho menos aproximados.

Constatamos el hecho de que si tenemos dos stripline con la misma separación entre placas, si $w_1 > w_2$ entonces $Z_{01} < Z_{02}$, por lo que $C_1 > C_2$.

Hay una limitación tecnológica para la Z_0 máxima que se puede obtener: lo más estrecha que se pueda hacer la pista.

También hay un límite para la Z_0 mínima, impuesta por el problema electromagnético.

La **frecuencia de corte del modo superior** nos la imponen dos factores:

▷ La separación entre placas:

$$f_{c1} \simeq \frac{c}{4b\sqrt{\epsilon_r}}$$

▷ La distancia entre los tornillos:

$$f_{c2} \simeq \frac{c}{2d\sqrt{\epsilon_r}}$$

Por tanto, para poder subir en frecuencia hay que reducir d y b , y dado que d no lo podemos reducir demasiado, tenemos una limitación importante.

2.5.4 Microstrip

2.5.4.1 Introducción

Es la línea de transmisión planar que más se usa en la actualidad. No se empezó a usar hasta que la tecnología permitió hacer la capa de dieléctrico suficientemente delgada como para que la dispersión en frecuencia no influyese tanto. Esta influencia es mayor cuando más gruesa es la línea del dieléctrico.

En la figura (2.55) vemos la estructura de la línea microstrip y las líneas de campo eléctrico. Está formada por dos conductores separados por un dieléctrico de bajas pérdidas.

La configuración de campo realmente depende de la frecuencia, ya que el problema es no homogéneo, al haber dos dieléctricos: el aire y el que separa los conductores. Por tanto, no hay solución TEM ya que se propagan modos híbridos. Por ello esta línea es muy complicada de analizar, tanto que no existe solución analítica.

La dependencia con la frecuencia de la configuración de los campos es lo que se llama **dispersión en frecuencia**.

Si aumenta la frecuencia, lo hace también la componente longitudinal de los campos, mientras que si baja la frecuencia, tenemos un modo **quasi-TEM**, que se parece al TEM. Esto es aplicable a líneas microstrip con un sustrato dieléctrico eléctricamente pequeño: $h \ll \lambda$. En este caso, podremos hacer una aproximación aceptable de la velocidad de fase, constante de propagación e impedancia característica, buscando **soluciones estáticas o cuasi-estáticas**.

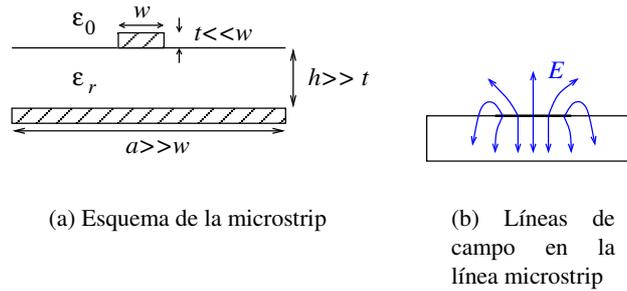


Figura 2.55: (a) Esquema de la línea microstrip y (b) Líneas de campo eléctrico

2.5.4.2 Análisis en estática

Buscamos por tanto la solución en estática ($f = 0$), haciendo el análisis como si sólo hubiera modo TEM.

Podemos expresar la velocidad de fase como

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{reff}}}$$

y la constante de propagación

$$\beta = \beta_0 \sqrt{\epsilon_{reff}}$$

Es evidente que la longitud de onda, a partir de β es

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda_{vacio}}{\sqrt{\epsilon_{reff}}}$$

Para la impedancia característica también tenemos una relación que es

$$Z_0 = \frac{Z_0|_{dielectrico=vacio}}{\sqrt{\epsilon_{reff}}}$$

Donde ϵ_{reff} es la **constante dieléctrica efectiva**, una constante que se puede tomar como la equivalente del problema total con dos dieléctricos y que por lo general estará comprendida entre los valores

$$1 < \epsilon_{reff} < \epsilon_r$$

Se puede interpretar como la constante dieléctrica de un medio homogéneo que reemplaza el aire y la región dieléctrica de la microstrip.

Depende del grosor del dieléctrico h , de la anchura del conductor w y de la frecuencia.

La configuración de los campos no sólo depende de la frecuencia, sino también de la constante dieléctrica del dieléctrico que separa las placas metálicas. Vemos un ejemplo en la figura (2.56). Se observa que cuanto mayor es ϵ_r , más se confinan las líneas de campo en la línea, por lo que hay menos pérdidas por radiación.

Para evitar la radiación al exterior también se puede encerrar la línea en una caja metálica, aunque hay que tener en cuenta las dimensiones:

- ⤵ No demasiado pequeña para no perturbar el campo
- ⤵ No demasiado grande para que no aparezcan modos superiores

Según por donde vayan las líneas de campo, ϵ_{reff} tenderá a un valor o a otro:

- Si hay más líneas de campo por el dieléctrico, entonces $\epsilon_{reff} \rightarrow \epsilon_r$
- Si hay más líneas por el aire, $\epsilon_{reff} \rightarrow 1$

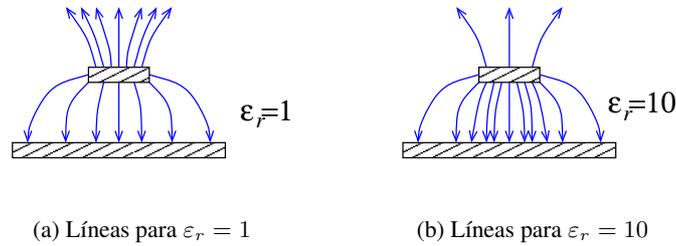


Figura 2.56: Líneas de campo en la microstrip para distintas ϵ_r

Las **dependencias** de ϵ_{reff} son:

1. Con la frecuencia
2. Con la relación entre las ϵ_r del dieléctrico entre las placas y el exterior
3. Con las líneas de campo
4. Con la relación de aspecto, $\frac{w}{h}$

En cuanto a la relación de aspecto, podemos mencionar lo siguiente:

- Si $w/h \gg 1$, hablamos de **pista ancha**, $\epsilon_{reff} \rightarrow \epsilon_r$ y las líneas de campo están prácticamente confinadas en el dieléctrico. Es equivalente a una línea biplaca. Es lo que vemos en la figura (2.57.a).
- Si $w/h \ll 1$, se trata de una **pista estrecha**, por tanto $\epsilon_{reff} \rightarrow \frac{1+\epsilon_r}{2}$ y las líneas de campo salen hacia arriba y vuelven al plano de masa. Vemos este tipo de pista representada en la figura (2.57.b).

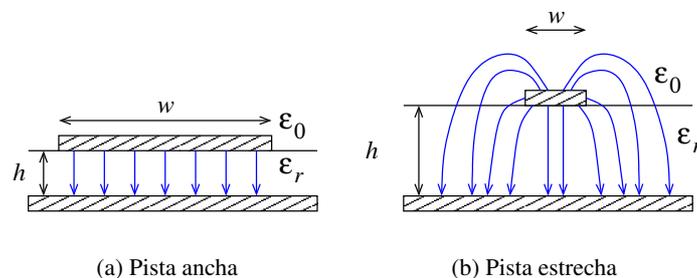


Figura 2.57: Líneas de campo para (a) pista ancha y (b) pista estrecha

Por tanto, en **estática** tenemos

$$\frac{1 + \epsilon_r}{2} < \epsilon_{reff} < \epsilon_r$$

Podemos dar una fórmula aproximada para ϵ_{reff} :

$$\epsilon_{reff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \frac{h}{w}}} \tag{2.82}$$

Por lo general se usan gráficas de ϵ_{reff} en función de w , h y ϵ_r .

La aproximación cuasiestática es válida siempre que las dimensiones involucradas sean mucho menores que la longitud de onda, es decir

$$w \ll \lambda$$

$$h \ll \lambda$$

La frecuencia máxima de uso se puede aproximar por

$$f_d = \sqrt{\frac{Z_0 [\Omega]}{h [cm] \sqrt{\epsilon_r - 1}}} \text{ GHz} \tag{2.83}$$

Cuando subimos en frecuencia, aparecen más líneas de campo confinadas en el dieléctrico que separa los conductores que en el aire. Esta situación se ilustra en la figura (2.58). Es algo equivalente a decir que la constante dieléctrica efectiva se incrementa:

$$\epsilon_{reff_2} > \epsilon_{reff_1}$$

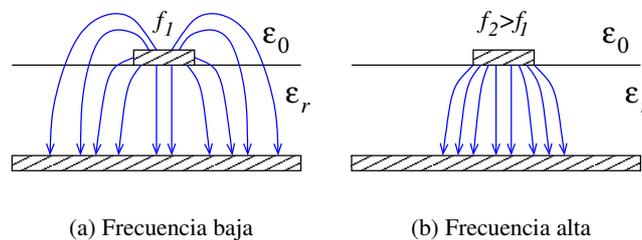


Figura 2.58: Efecto de subir en frecuencia sobre las líneas de campo

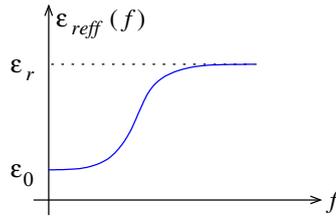
Por tanto podemos decir que

$$\epsilon_{reff} = \epsilon_{reff}(f)$$

Es decir, que la longitud de onda tiene una doble dependencia con la frecuencia:

$$\lambda = \frac{c/f}{\sqrt{\epsilon_{reff}(f)}}$$

Al igual que la constante de fase. En la figura (2.59) vemos una gráfica con la evolución que tiene la constante dieléctrica eficaz con la frecuencia. Esta evolución es cierta siempre que no existan pérdidas importantes en los medios. Si aumenta la relación w/h , la diferencia entre el valor inicial y el final decrece, como se desprende de la ecuación (2.82). Esto es porque en estática la ϵ_{reff} se acerca a la ϵ_r del dieléctrico entre las placas, ya que se trata de una pista ancha como ya vimos.

Figura 2.59: Dependencia de ϵ_{reff} con la frecuencia

2.5.4.3 Diseño de una línea microstrip

Podemos dar unas fórmulas aproximadas para la impedancia característica y la atenuación. Ya hemos visto la ecuación (2.82), que nos da la expresión para la constante dieléctrica efectiva.

Para la **impedancia característica**:

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{reff}}} \ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right) & \frac{w}{h} \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{reff}}\left(\frac{w}{h} + 1.393 + 0.667 \ln\left(\frac{w}{h} + 1.444\right)\right)} & \frac{w}{h} \geq 1 \end{cases} \quad (2.84)$$

Mientras que la **constante de atenuación debida a las pérdidas en el dieléctrico** es

$$\alpha_d = \frac{k_0 \epsilon_r (\epsilon_{reff} - 1) \operatorname{tg} \delta}{2\sqrt{\epsilon_{reff}} (\epsilon_r - 1)} \quad \text{Np/m} \quad (2.85)$$

Siendo $k_0 = \beta / \sqrt{\epsilon_{reff}}$.

Por otra parte, la **constante de atenuación debida a las pérdidas en los conductores** se puede calcular aproximadamente como

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 w} \quad \text{Np/m} \quad (2.86)$$

Donde

$$R_s = \sqrt{\frac{\epsilon \mu_0}{2\sigma}}$$

es la resistencia superficial del conductor.

En la mayoría de las líneas microstrip las pérdidas debidas a los conductores son mucho más importantes que las pérdidas en el dieléctrico, aunque hay excepciones.

También podemos calcular la **relación de aspecto en función de la impedancia característica**, de la siguiente forma:

$$\frac{w}{h} = \begin{cases} \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} & \frac{w}{h} < 2 \\ \frac{2}{\pi} \left(B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left(\ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\epsilon_r} \right) \right) & \frac{w}{h} > 2 \end{cases} \quad (2.87)$$

Donde hemos usado las siguientes constantes:

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(0.23 + \frac{0.11}{\epsilon_r} \right)$$

$$B = \frac{120\pi^2}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}}$$

No olvidemos que estas fórmulas sólo dan valores aproximados. Están extraídas de la referencia bibliográfica [1].

2.5.4.4 Uso en la práctica

El uso de la microstrip está muy extendido debido a las técnicas fotolitográficas y a su facilidad de integración con otros dispositivos de microondas, tanto activos como pasivos.

Normalmente se usa encerrada en una caja metálica, grande para no afectar al modo fundamental. Dado que se propagarán modos superiores, lo que se hace es incluir una condición de contorno que consiste en un material absorbente de muchas pérdidas, que atenuará mucho a los modos superiores y no afectará al modo fundamental.

El tamaño de esa caja se diseñará en cualquier caso para una frecuencia de corte de modo superior suficientemente alta.

2.6 Aspectos prácticos de las líneas de transmisión

Como aspecto interesante vamos a mencionar la limitación de potencia que puede manejar una línea de transmisión.

La limitación viene impuesta por la tensión de ruptura del dieléctrico, que para el aire es de $E_d = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ a temperatura ambiente (25°C) y a 1 atm de presión (presión a nivel del mar).

En un coaxial relleno de aire, el campo eléctrico varía según

$$E_\rho = \frac{V_0}{\rho \ln \frac{b}{a}}$$

Tiene un máximo en $\rho = a$, por lo que la tensión pico a pico máxima es

$$V_{0_{max}} = E_d a \ln \frac{b}{a}$$

Y la potencia será

$$P_{max} = \frac{V_{0_{max}}^2}{2Z_0} = \frac{\pi a^2 E_d^2}{\eta_0} \ln \frac{b}{a}$$

Lo que nos dice que cuanto mayores sean las dimensiones del coaxial (mantener b/a para la misma Z_0 , incrementando a y b), mayor potencia será capaz de manejar. Sin embargo, cuanto mayor es la cavidad del coaxial, aparecen modos superiores a frecuencias menores. Por tanto, para una frecuencia máxima de funcionamiento tenemos también un límite en la potencia máxima que el cable es capaz de soportar. Esta relación es

$$P_{max} = \frac{0.025}{\eta_0} \left(\frac{cE_d}{f_{max}} \right)^2 = 5.8 \cdot 10^{12} \left(\frac{E_d}{f_{max}} \right)^2$$

Además esta potencia máxima decrece con la frecuencia al cuadrado. Si queremos un coaxial con una frecuencia máxima de 1 GHz , la potencia máxima que podrá soportar será de 52.2 MW , mientras que si subimos a 10 GHz tendremos el límite en 522 kW , y si nos vamos a 60 GHz , el límite se pone en 14.5 kW .

De todas formas, estos datos son para el aire, y para cualquier otro dieléctrico la tensión de ruptura es bastante superior a $3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$.

Transformación y adaptación de impedancias

3.1 Definición del problema

Tenemos un sistema formado por un generador con su impedancia de salida Z_g y una carga Z_L , a la que queremos transmitir la máxima potencia posible. Para ello, lo que hacemos es intercalar una **red adaptadora**, como vemos en la figura (3.1), con el objeto de hacer que se cumpla el teorema de máxima transferencia de potencia, es decir

$$Z_{in} = Z_g^*$$

Con ello, tendremos que la potencia a la entrada de la red adaptadora será

$$P_{in} = P_{dg} = \frac{|V_g|^2}{8R_g}$$

Siendo P_{dg} la potencia disponible del generador. R_g es la parte real de la impedancia del generador.

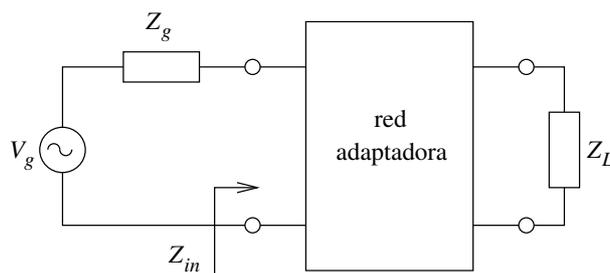


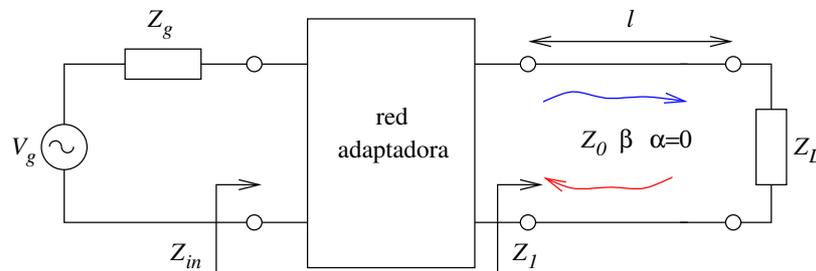
Figura 3.1: Definición del problema de adaptación de impedancias

En teoría la red no tiene pérdidas, pero en la práctica sí que habrá pérdidas. En el caso de que no las haya, la potencia que llegue a la carga será la misma que hay a la entrada de la red:

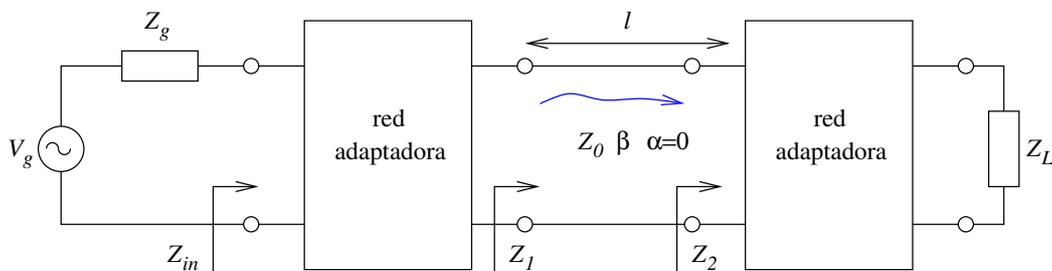
$$P_L = P_{in} = P_{dg}$$

Hay varias formas de hacer la adaptación. En la figura (3.2) vemos dos opciones válidas. Podemos ver detalles sobre ambas:

- ⇒ En la primera, se tiene una línea terminada en una Z_L genérica, por lo que en general no estará adaptada ($Z_L \neq Z_0$), lo que significa que habrá onda reflejada (línea roja), con los inconvenientes que ello tiene:
- ⇒ No llega toda la potencia a la carga
 - ⇒ Hay distorsión
 - ⇒ Aumenta la tensión en la línea, por lo que puede llegar a la de ruptura del dieléctrico
 - ⇒ Es sensible a las variaciones de la frecuencia ($Z_1(f)$)
 - ⇒ Además, las imprecisiones en la longitud también hacen que varíe Z_1 , con lo que puede dejar de funcionar
- ⇒ Una opción mejor es la segunda, que a la salida de la línea de transmisión intercala otra red adaptadora, con la que podemos hacer que la impedancia que vea la línea sea la misma que la suya característica, $Z_2 = Z_0$. Por tanto, no habrá onda reflejada y se eliminan todos los inconvenientes anteriores. Además, funcionará independientemente de la frecuencia, siempre que no cambie el funcionamiento de la red adaptadora.



(a) Red seguida de línea de transmisión



(b) Red, línea de transmisión y red

Figura 3.2: Dos opciones para hacer la adaptación: (a) una red seguida de una línea de transmisión y (b) una red seguida de una línea de transmisión a la que sigue otra red adaptadora

Lo que vamos a hacer es buscar redes adaptadoras que transformen Z_L arbitraria (compleja) a Z_0 (real).

3.2 Clasificación del problema

Podemos hacer dos clasificaciones principales:

- ⊃ **Banda estrecha:** la frecuencia de trabajo, f_0 , es única. Se puede tener un ancho de banda relativo del 5 – 10 % con respecto a la frecuencia central: $0.95f_0 \rightarrow 1.05f_0$.

$$BW_r = \frac{BW}{f_0}$$

El diseño se hace normalmente para la frecuencia central.

- ⊃ **Banda ancha:** admite variaciones del orden del 50 % con respecto a la frecuencia central. Existen limitaciones teóricas, como que no se puede tener máxima transferencia de potencia en todo el ancho de banda. En un trabajo de Fano (1950), se demuestra que el producto ganancia por ancho de banda es constante, y se llega a la conclusión de que no se puede obtener máxima transferencia de potencia en un ancho de banda finito continuo, aunque sí a infinitas frecuencias discretas.

Dentro de cada una de estas dos clasificaciones podemos hacer otras dos, según Z_L sea real o compleja. Vamos a suponer en todo momento Z_g real.

Tenemos entonces:

- ⊃ Banda estrecha:

- ⇒ Z_L real, resuelto con los siguientes métodos:
 - ↳ Transformador en $\lambda/4$
 - ↳ Transformación reactiva de resistencias (redes LC)
- ⇒ Z_L compleja, que se resuelve con los métodos:
 - ↳ Transformador corto (misma idea que el transformador en $\lambda/4$)
 - ↳ Transformación reactiva de impedancias (redes LC)
 - ↳ Adaptación con línea y *stub* (elementos distribuidos)

- ⊃ Banda ancha:

- ⇒ Z_L real, que podemos resolver de dos formas, las cuales veremos sólo por encima:
 - ↳ Una basada en el transformador en $\lambda/4$ (transformador en $\lambda/4$ multisección)
 - ↳ Línea de transmisión no uniforme o *taper*
- ⇒ Z_L compleja, que no vamos a estudiar.

El diseño en general lo haremos, siempre que podamos, con la carta de Smith. Vamos a hacer los siguientes movimientos sobre la carta de Smith:

- ⊃ Sobre circunferencias de resistencia constante, para conectar impedancias reactivas en serie
- ⊃ Sobre circunferencias de admitancia constante, para conectar admitancias reactivas en paralelo
- ⊃ Sobre circunferencias de módulo del coeficiente de reflexión constante, para conectar una línea de transmisión

Trabajaremos además con las impedancias normalizadas a Z_0 en el caso de que usemos líneas de transmisión.

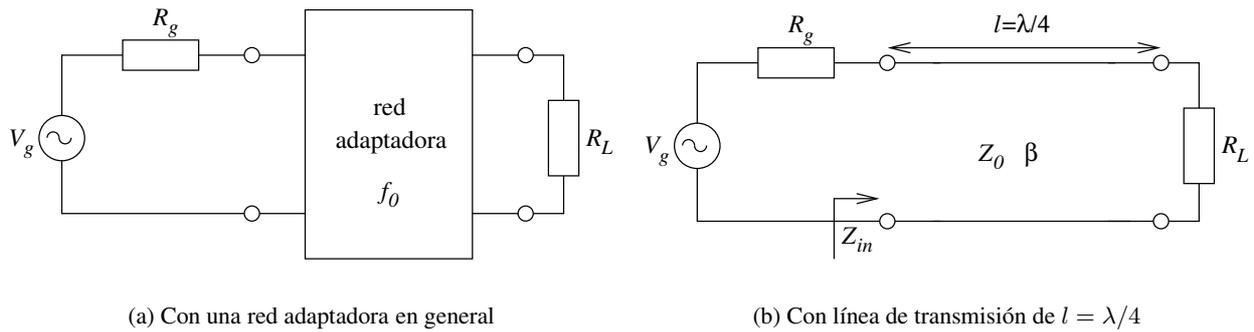


Figura 3.3: Esquema para el transformador en $\lambda/4$ de impedancias reales en banda estrecha

3.3 Adaptación de impedancias reales en banda estrecha

3.3.1 Transformador en $\lambda/4$

Consideramos el esquema de la figura (3.3), en el cual la red adaptadora no tiene pérdidas, por lo que sólo contendrá inductancias, condensadores o líneas de transmisión sin pérdidas.

La impedancia de entrada será

$$Z_{in} = Z_0 \frac{R_L \cos \theta + jZ_0 \sin \theta}{Z_0 \cos \theta + jR_L \sin \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{R_L}$$

Esto nos lleva a que, para que haya adaptación de impedancias, el generador debe ver la misma impedancia que la suya y

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{R_g R_L}} \quad (3.1)$$

Hay adaptación de impedancias y por tanto máxima transferencia de potencia, sin embargo, existe onda reflejada ya que $Z_0 \neq R_L$.

Para diseñar este caso no usamos la carta de Smith, sino que aplicamos la fórmula para Z_0 .

Tenemos dos especificaciones:

$$\begin{aligned} \Re(Z_{in}) &= R_g \\ \Im(Z_{in}) &= 0 \end{aligned}$$

Y dos variables de diseño:

$$\begin{aligned} l &= \lambda/4 \\ Z_0 &= \sqrt{R_g R_L} \end{aligned}$$

Podemos comprenderlo más intuitivamente usando la carta de Smith. Una línea de longitud $\lambda/4$ implica que hay que moverse media carta de Smith, o $\lambda/4 + n \cdot \lambda/2$:

$$l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Es decir, que conseguimos adaptación a las siguientes frecuencias:

$$f = (2n + 1) f_0$$

Son infinitas frecuencias discretas.

Si quisiéramos diseñarlo con la carta de Smith, normalizamos las impedancias:

$$\bar{R}_L = \frac{R_L}{Z_0}$$

$$\bar{R}_g = \frac{R_g}{Z_0}$$

Y tendríamos que hacer que caigan sobre el mismo círculo de $|\rho| = cte$, por lo que la solución hay que buscarla por el método de prueba y error. Obviamente, es más rápido con la fórmula.

De hecho, con la resolución mediante la carta de Smith obtenemos la misma fórmula, si consideramos que tendríamos que igualar dos “coeficientes de reflexión”: $|\rho_{R_g}| = |\rho_{R_L}|$, es decir

$$\left| \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} \right| = \left| \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \right|$$

Si de aquí despejamos Z_0 , se obtiene

$$\frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = \pm \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \Rightarrow R_g R_L - Z_0^2 + (R_g - R_L) Z_0 = \pm (R_g R_L + (R_L - R_g) Z_0 - Z_0^2)$$

Dado que tomando el signo positivo se obtiene $Z_0 = 0$, tomando el negativo

$$2R_g R_L = 2Z_0^2 \Rightarrow Z_0 = \sqrt{R_g R_L}$$

Obtenemos también la **respuesta en frecuencia** de esta red adaptadora, para ver cuánto nos podemos desviar de la frecuencia de diseño sin que la transferencia de potencia empeore mucho. Para ello, definimos ρ_{in} como

$$\rho_{in} = \frac{Z_{in} - R_g}{Z_{in} + R_g}$$

En las frecuencias a las que haya adaptación se tendrá $\rho_{in} = 0$. Por otro lado, habrá una cota máxima que viene dada por el valor a la frecuencia cero, ya que a esa frecuencia es como si no hubiera línea, y se tiene que ese valor máximo es

$$\rho_{in_{max}} = \frac{R_L - R_g}{R_L + R_g}$$

En la figura (3.4) vemos la representación gráfica de esta función de transferencia. Como podemos observar, hay una cota máxima y ceros a infinitas frecuencias discretas.

$\theta = \pi/2$ corresponde a la longitud $l = \lambda/4$, $\theta = 3\pi/2$ con $l = 3\lambda/4$.

Si hay una pequeña desviación en la frecuencia, enseguida se hace $|\rho_{in}| \neq 0$, por lo que esta transformación es de **banda estrecha**.

Se puede admitir un $|\rho_{in}|$ máximo para conseguir un cierto ancho de banda.

Otra cosa que podemos ver es que cuanto más desadaptación haya, es decir, cuanto más diferentes sean R_g y R_L , mayor es la cota máxima, por lo que el ancho de banda es menor para un determinado valor máximo permitido de $|\rho_{in}|$.

Se puede hacer la transformación de forma progresiva, con varias líneas de transmisión en $\lambda/4$ para que la variación de resistencias sea menos brusca, con lo que se consigue un mayor ancho de banda. Esto es lo que se hace con la transformación en $\lambda/4$ multisección, que veremos posteriormente.

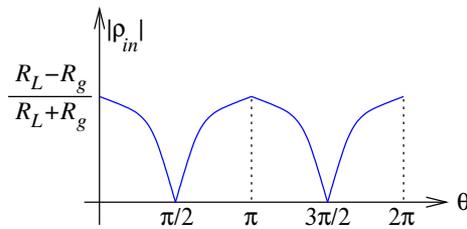


Figura 3.4: Función de transferencia del transformador en $\lambda/4$

3.3.2 Transformación reactiva de resistencias

Podemos usar dos formas de redes reactivas (LC), las dos que hay en la figura (3.5). Cada una se usa según la relación que haya entre R_L y R_g :

- ⤷ Si $R_L < R_g$, entonces se usa una red serie-paralelo, como vemos en la subfigura (a), que lo que hace es aumentar la resistencia que ve R_g
- ⤷ Si $R_L > R_g$, se usa la red paralelo-serie de la subfigura (b), que disminuye la resistencia vista por el generador

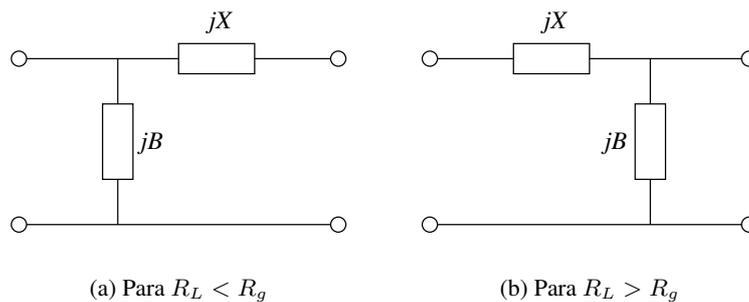


Figura 3.5: Esquemas que se usan para la transformación reactiva de resistencias

3.3.2.1 $R_L > R_g$

Para este caso analizamos el esquema de la figura (3.6), calculando la siguiente impedancia de entrada:

$$Z_{in} = \frac{1}{\frac{1}{R_L} + jB} + jX = R_g \quad (3.2)$$

Obtenemos X y B teniendo en cuenta que

$$\Re(Z_{in}) = R_g$$

$$\Im(Z_{in}) = 0$$

De esto se obtienen las **ecuaciones de diseño de la red** adaptadora:

$$\boxed{\begin{aligned} B &= \pm \sqrt{\frac{R_L - R_g}{R_L^2 R_g}} \\ X &= \pm \sqrt{R_g (R_L - R_g)} \end{aligned}} \quad (3.3)$$

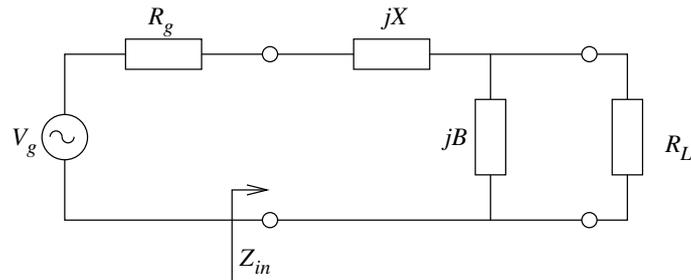
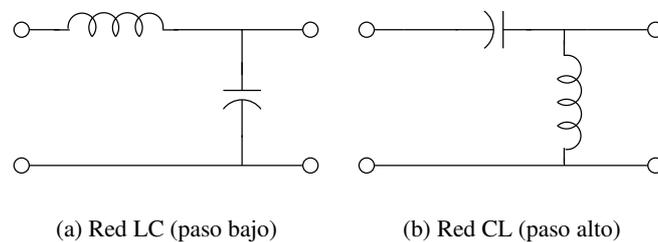


Figura 3.6: Circuito para la transformación reactiva de $R_L > R_g$

La funcionalidad de los dos elementos de la red es:

- La susceptancia jB en paralelo disminuye la R_L
- La reactancia jX en serie anula la parte imaginaria de la impedancia resultante

Cualquiera de las dos se puede implementar con una inductancia o una capacidad (cada una distinta de la otra), la elección de una u otra solución dependerá del tipo de respuesta que deseemos (paso bajo o paso alto) y de la tecnología que usemos, ya que algunas como la stripline no nos permitirán conectar capacidades en serie. En la figura (3.7) vemos ambas soluciones.



(a) Red LC (paso bajo)

(b) Red CL (paso alto)

Figura 3.7: Redes LC y CL en escalera

Para obtener mejores anchos de banda se pueden usar redes adaptadoras con 3 o más elementos reactivos.

Veamos ahora cómo se haría con la carta de Smith. En la figura (3.8) tenemos la carta de Smith que pasamos a explicar a continuación:

- La línea verde oscuro es la conversión inicial de impedancia a admitancia para poder sumar las admitancias en paralelo.
- El círculo verde claro indica el desplazamiento de parte real constante que implica sumar una impedancia reactiva pura, en este caso en paralelo.
- El círculo azul oscuro es el de parte real igual a la unidad girado 180° .
- Los arcos negros indican la suma de la susceptancia en paralelo.
- Los arcos azules son la suma de la reactancia en serie.
- Las líneas rojas son la conversión de admitancia a impedancia para pasar de paralelo a serie.

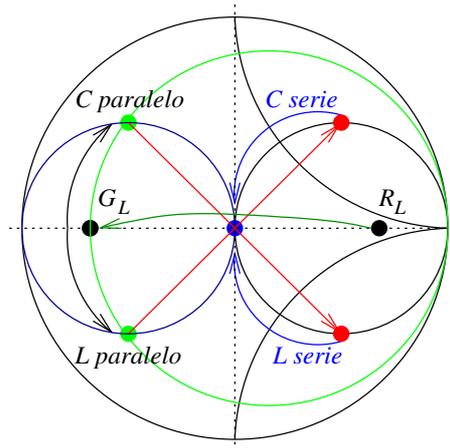


Figura 3.8: Transformación de resistencias con la carta de Smith para $R_L > R_g$

⇒ El punto azul indica el destino deseado: $\bar{R}_{in} = 1$, es decir, $R_{in} = R_g$, la adaptación buscada.

Ahora bien, en este caso no tenemos línea de transmisión, por lo que no hay Z_0 con la que normalizar. Lo que hacemos es normalizar con respecto a R_g , con lo que

$$\bar{R}_L = \frac{R_L}{R_g}$$

$$\bar{R}_g = \frac{R_g}{R_g} = 1$$

$$\bar{G}_L = \frac{R_g}{R_L}$$

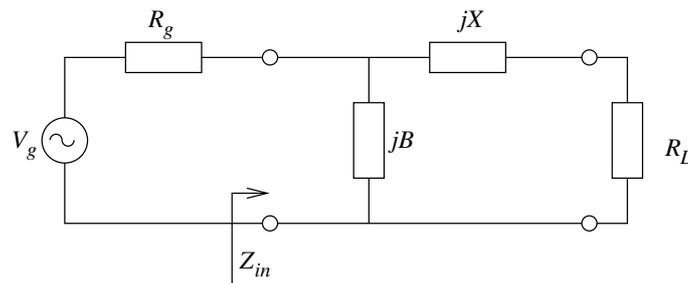
Es decir, dado que $R_L > R_g$, se colocará el punto \bar{R}_L donde la componente resistiva sea mayor que la unidad, y para trabajar con las admitancias giramos 180° dicha \bar{R}_L . Tendremos en cuenta que la evolución en el problema será regresiva, es decir, que empezamos por la salida de la red adaptadora para llegar a la entrada.

Los **pasos a seguir** para realizar la adaptación son:

1. Colocar \bar{R}_L y girarla 180° para convertirla a admitancia
2. Sumar la admitancia jB en paralelo, desplazándonos por la circunferencia de parte real constante hasta que intersecte a la circunferencia de parte real igual a uno que está girada 180° (la circunferencia azul oscuro). En caso de colocar un inductor en paralelo, nos desplazaremos hacia abajo, mientras que si ponemos un condensador, el desplazamiento será hacia arriba
3. Girar 180° para convertir de nuevo a impedancia, ya que lo que tenemos va en serie con el siguiente elemento. Esta impedancia intersectará a la circunferencia de parte real igual a la unidad.
4. Sumar la impedancia jX a la impedancia que tenemos, hasta llegar al centro de la carta de Smith que nos indica que tenemos adaptación de impedancias. De forma similar al caso anterior, si nos desplazamos hacia arriba tendremos un inductor en serie, mientras que si lo hacemos hacia abajo, un condensador. Es obvio que si antes hemos colocado un inductor, ahora tendremos que colocar forzosamente un condensador, y viceversa.

Los valores que se obtienen se miran en las circunferencias de parte imaginaria constante, ya que son impedancias reactivas.

Si quisiéramos resolver este caso con la otra red, la paralelo-serie, no podríamos, ya que al empezar no habría que convertir a admitancia, y al sumar la impedancia jX en una circunferencia de parte real constante no se podría llegar a la circunferencia azul oscuro.

3.3.2.2 $R_g > R_L$ Figura 3.9: Circuito para la transformación reactiva de $R_L < R_g$

En este caso, el circuito es el de la figura (3.9), que nos lleva a la ecuación:

$$Y_{in} = jB + \frac{1}{jX + R_L} = \frac{1}{R_g} = Y_g \quad (3.4)$$

Imponiendo las mismas condiciones que en el caso anterior, llegamos al siguiente resultado:

$$\boxed{\begin{aligned} B &= \pm \sqrt{\frac{R_g - R_L}{R_L^2 R_g}} \\ X &= \pm \sqrt{R_L (R_g - R_L)} \end{aligned}} \quad (3.5)$$

Vemos que el resultado es muy parecido.

Ahora el proceso con la carta de Smith es un poco más corto que antes, y lo ilustraremos de la misma forma. Vemos en la figura (3.10) los **pasos a seguir**, que son:

1. Sumar jX a $\overline{R_L}$ hasta llegar a la circunferencia de parte real igual a la unidad, girada 180° . De nuevo, según el sentido tendremos un elemento u otro. Si vamos hacia arriba, lo que encontramos es un inductor en serie, mientras que si vamos hacia abajo, un condensador (también en serie).
2. Girar 180° hasta intersectar en la circunferencia de parte real igual a la unidad, para cambiar a admitancias, ya que el siguiente elemento está en paralelo.
3. Sumar jB al resultado hasta llegar al centro de la carta de Smith, con lo que tendremos finalmente la adaptación.

El razonamiento para que en este caso no se pueda usar la red serie-paralelo es el mismo que vimos en el caso anterior: al sumar la admitancia en paralelo no llegamos a la circunferencia de parte real la unidad, ya que nos queda la admitancia en el otro lado.

Si tuviéramos una impedancia compleja a adaptar, el proceso sería el mismo, pero podríamos usar cualquiera de las dos topologías vistas en el caso de que la impedancia no estuviera contenida en el círculo de parte real igual a la unidad o su reflejada.

3.4 Adaptación de impedancias complejas en banda estrecha

Para impedancias complejas teníamos 3 técnicas para adaptar las impedancias:

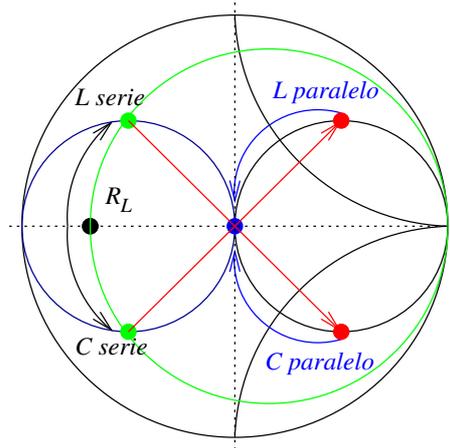


Figura 3.10: Transformación de resistencias con la carta de Smith para $R_g > R_L$

1. Transformador corto
2. Transformación reactiva (redes LC)
3. Adaptación con línea y *stub*

Veremos una por una detallando los pasos a seguir y las limitaciones de cada una de ellas.

3.4.1 Transformador corto

Esta técnica está basada en la misma idea que el transformador en $\lambda/4$ para impedancias reales. Se usa la propiedad de transformación de impedancias de una línea de transmisión.

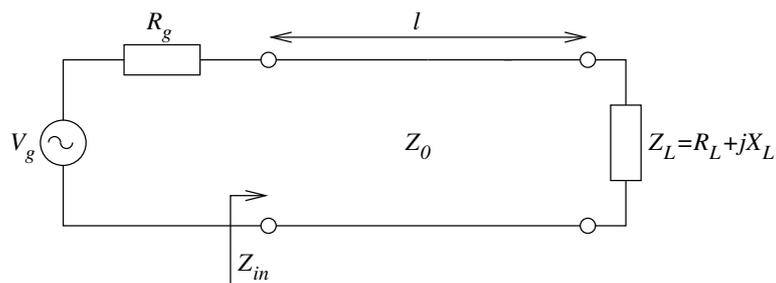


Figura 3.11: Esquema del transformador corto para adaptar impedancias complejas

Recordemos que la impedancia de entrada de una línea de transmisión terminada con Z_L es

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos \theta + j Z_0 \sin \theta}{Z_0 \cos \theta + j Z_L \sin \theta}$$

Esta es la que hay que adaptar, es decir, igualar a la impedancia del generador:

$$Z_{in} = R_g$$

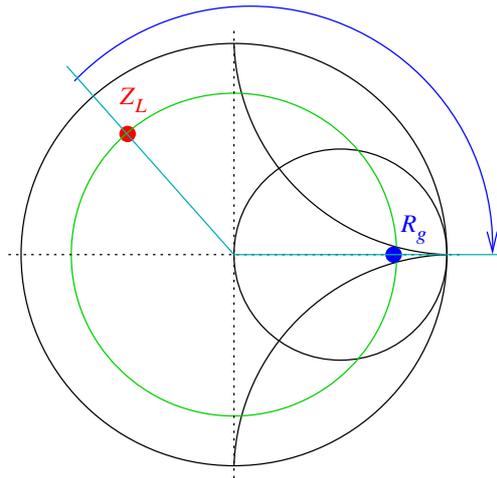


Figura 3.12: Carta de Smith ilustrando la adaptación de impedancias complejas mediante transformador corto

de ahí se despejan las dos variables que tenemos, Z_0 y l :

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{R_L R_g - \frac{X_L^2 R_g}{R_g - R_L}} \\ \operatorname{tg} \theta &= Z_0 \frac{R_g - R_L}{X_L R_g} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Es fácil comprobar que existen algunas limitaciones de carácter teórico para su implementación:

⇒ En primer lugar, la impedancia característica Z_0 debe ser real, por lo que debe cumplirse

$$R_L > R_g$$

o bien

$$R_L < R_g \quad \text{y} \quad X_L^2 < R_L (R_g - R_L)$$

Nos interesará una impedancia característica según la tecnología que usemos, de forma que sea realizable. Por lo general, estará entre 30 y 150Ω .

⇒ $\operatorname{tg} \theta$ debe ser positivo, para que lo sea la longitud, por lo que si $R_g > R_L$, debe ser $X_L > 0$ y viceversa.

Para el diseño de este tipo de adaptación se usan las fórmulas vistas. Vamos a ver cómo podemos interpretar esto en términos de la carta de Smith, mirando el diagrama de la figura (3.12).

Con la carta de Smith no se puede hacer fácilmente, ya que habría que ir probando con cada Z_0 para que se cumpla que \bar{Z}_L y \bar{R}_g caigan en la misma circunferencia de $|\rho| = \text{cte}$.

3.4.2 Transformación reactiva de impedancias complejas

Esta técnica es equivalente a la que vimos para el caso de impedancias reales con redes LC. Por tanto, consideramos las mismas topologías que vimos en la figura (3.5).

Dentro de esta técnica encontramos 3 formas adicionales de resolver el problema. Las vemos a continuación.

3.4.2.1 Técnica de absorción

Esta técnica consiste en hacer el diseño ignorando la reactancia de la impedancia de carga, con lo que se obtiene la red adaptadora igual que en el caso anterior. Posteriormente, se *absorbe* la reactancia que tiene la carga en la que nos interesa de la red obtenida.

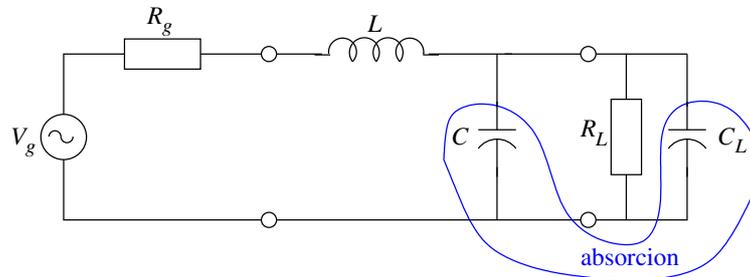


Figura 3.13: Ejemplo de absorción de una capacidad

Por ejemplo, como en la figura (3.13), que tenemos una impedancia de carga compuesta por una resistencia y un condensador en paralelo, mientras que la red adaptadora obtenida es una serie-paralelo, siendo el elemento en paralelo un condensador. Si ese condensador tiene de valor C y el de la carga C_L , la absorción nos lleva a

$$C_1 = C - C_L$$

Siendo C_1 el valor del condensador que habría que poner en la red adaptadora definitiva.

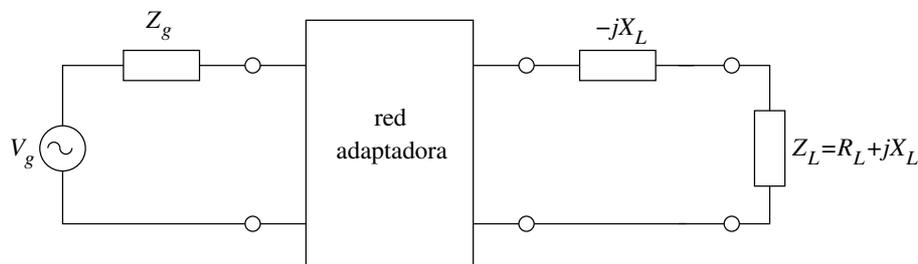


Figura 3.14: Técnica de resonancia para adaptar una impedancia compleja

Esto lógicamente tiene una limitación, y es que si $C_L > C$, no se puede hacer la absorción del elemento.

3.4.2.2 Técnica de resonancia

Esta técnica consiste en añadir un elemento que cancele la parte imaginaria de la carga, antes de añadir la red adaptadora. Entonces, la impedancia que hay que adaptar ahora es real. Se dice que se añade un elemento que “resuena” con la reactancia de la impedancia de carga.

Vemos el esquema de esta técnica en la figura (3.14).

Esto nos permite poner cualquier red adaptadora de impedancias reales, no sólo una red LC, sino también un transformador en $\lambda/4$.

Se usa cuando la técnica anterior no es realizable, por ejemplo.

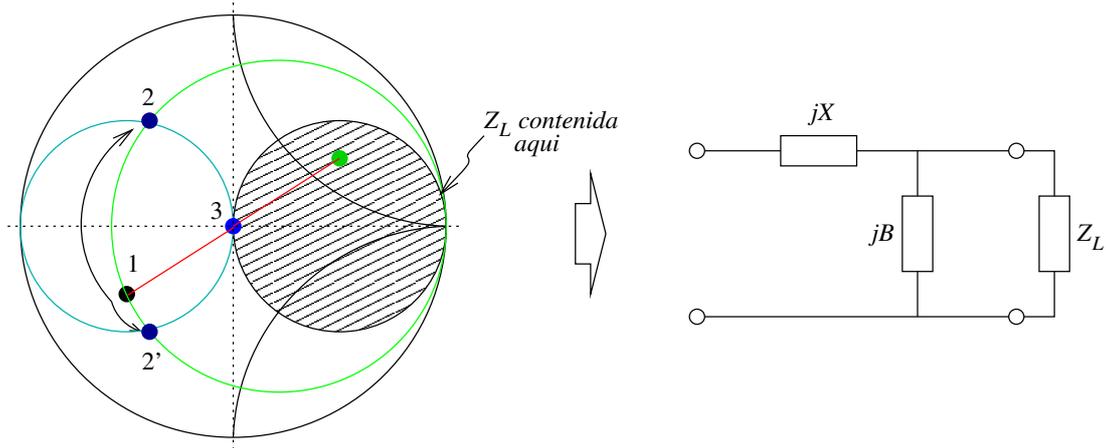


Figura 3.15: Adaptación de impedancias complejas con la carta de Smith cuando la impedancia de carga está contenida en la circunferencia de parte real igual a la unidad

3.4.2.3 Con la carta de Smith

En este caso hacemos el diseño de la red LC con la carta de Smith, como hicimos con las impedancias reales.

A continuación vamos a ver los movimientos que tenemos que hacer según la impedancia que haya de carga. La veremos en distintas zonas de la carta de Smith, y cómo se resuelve para cada caso, ya que según dónde esté se podrá o no resolver con algunas redes.

Z_L contenida en la circunferencia de parte real igual a la unidad

En este caso, para que al recorrer el círculo de parte real constante lleguemos a intersectar el de parte real la unidad (o su reflejo), hay que convertir antes a admitancia la impedancia de carga. Por tanto, ese será el primer paso, ilustrado todo en la figura (3.15). El resto es como lo hicimos para el caso de impedancias reales.

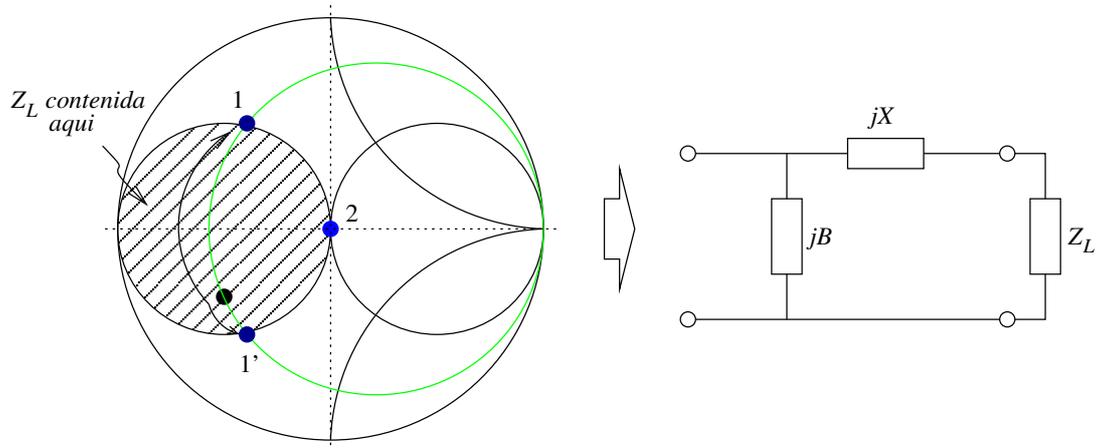


Figura 3.16: Adaptación de impedancias complejas con la carta de Smith cuando la impedancia de carga está contenida en la circunferencia de parte real igual a la unidad girada 180

Z_L contenida en el reflejo de la circunferencia de parte real igual a la unidad

Ahora tenemos la situación contraria, que vemos en la figura (3.16), y que consiste en que la impedancia de carga está dentro del círculo de parte real igual a la unidad girado 180°, por lo que en este caso no habrá que invertir la impedancia, y le colocaremos la impedancia en serie.

Z_L fuera de ambas circunferencias de parte real igual a la unidad

En este caso nos van a servir las dos topologías. Podemos encontrar 2 casos particulares:

- Z_L en el hemisferio superior. En este caso nos sirven los 4 circuitos que vemos en la figura (3.17), en los cuales observamos que el elemento más cercano a la carga es un condensador. El circuito que se obtenga dependerá de la forma de llegar al centro de la carta de Smith.

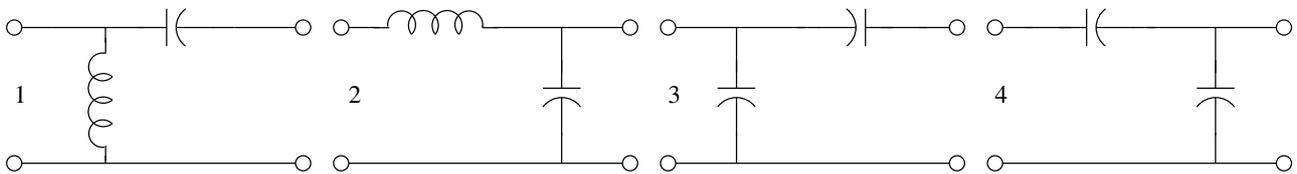


Figura 3.17: Circuitos posibles para Z_L en el hemisferio superior de la carta de Smith

- Z_L en el hemisferio inferior. Ahora tenemos 4 circuitos duales al caso anterior, y los vemos en la figura (3.18). Esta vez el elemento más cercano a la carga es un inductor.

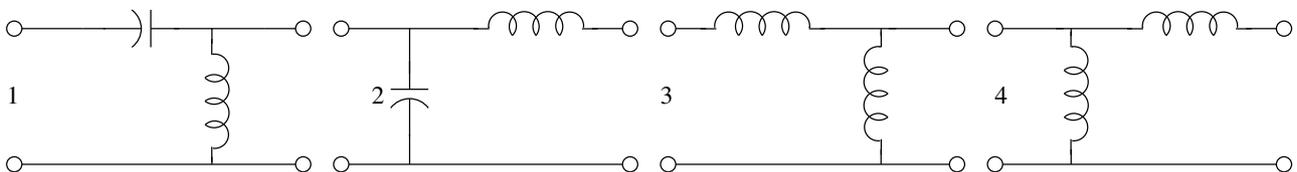


Figura 3.18: Circuitos posibles para Z_L en el hemisferio inferior de la carta de Smith

3.4.3 Adaptación con línea y stub

3.4.3.1 Presentación

Esta técnica consiste en usar una línea de transmisión, para transformar la impedancia, de forma que a la entrada de la línea buscamos que la parte real de la impedancia sea R_g .

En la figura (3.19) será por tanto

$$Z_1 = R_g + jX_1$$

Y posteriormente con la impedancia jX se cancela jX_1 . La impedancia jX puede ir en serie o paralelo, como podemos ver en la figura.

Las variables de diseño en este caso son X y d . Ahora no diseñamos Z_0 , sino que

$$Z_0 = R_g \tag{3.7}$$

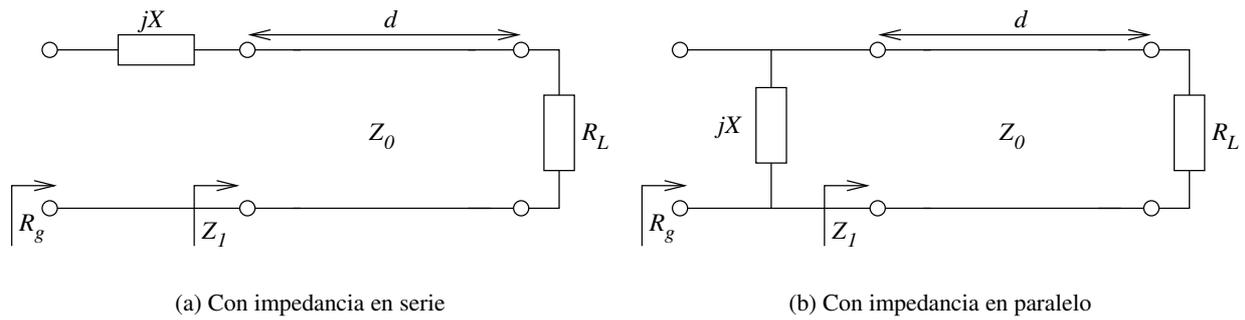


Figura 3.19: Presentación de la adaptación con línea y stub

El elemento X se implementará con un *stub*.

Un *stub* es una sección de línea de transmisión terminada en cortocircuito o circuito abierto, por lo que su comportamiento será inductivo o capacitivo, respectivamente.

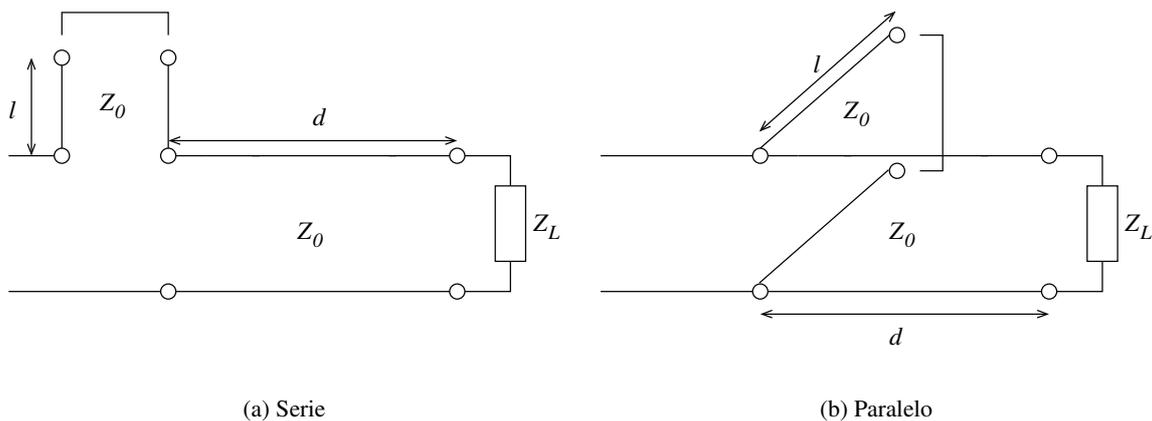


Figura 3.20: Stub en (a) serie y (b) paralelo

En la figura (3.20) podemos ver cómo sería la conexión de un *stub* en serie y en paralelo. Puede ir en circuito abierto o en cortocircuito, por eso queda flotante el cortocircuito.

Para tecnologías planares se deberá implementar el *stub* paralelo, al ser imposible la conexión en serie.

Las impedancias características tanto de la línea adaptadora como del *stub* son iguales a R_g .

Si trabajamos con la carta de Smith, el diseño se hará trabajando con impedancias. En la línea de transmisión nos moveremos por un círculo en el que el módulo del coeficiente de reflexión sea constante, mientras que para el *stub* nos moveremos por un círculo de parte real constante, ya que varía la reactancia.

3.4.3.2 Stub en serie

Tenemos en la figura (3.21) el diagrama de Smith para resolver el problema de adaptación con línea y *stub* en serie. Primero, se recorre el círculo de $|\rho| = cte$ (verde), hasta que nos lleve al círculo de parte real igual a la unidad, ya que el siguiente desplazamiento deberá llevarnos al centro de la carta. Hay dos posibilidades, ya que hay dos puntos en los que puede intersectar dicho círculo. Se tomará aquel que dé como resultado la menor longitud para la línea (d_1).

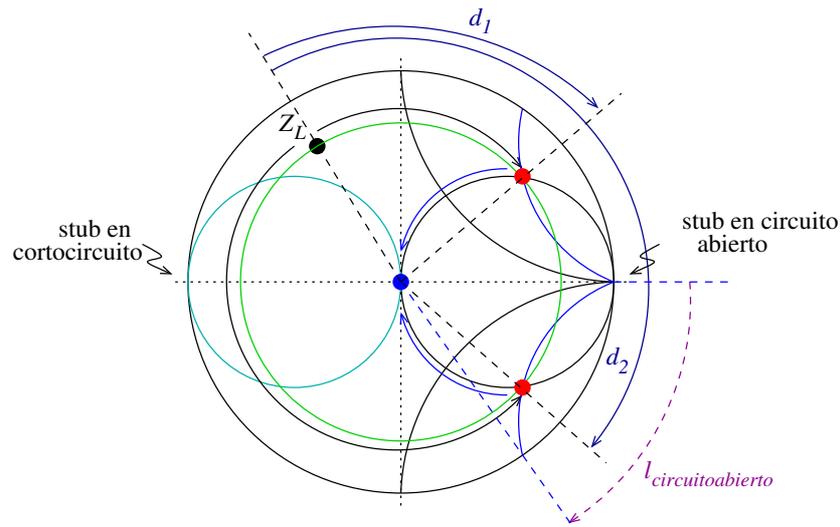


Figura 3.21: Carta de Smith para la adaptación con línea y stub en serie

La longitud se mide prolongando hasta el exterior de la carta, donde está marcada la longitud de onda, y se recorre en el sentido de las agujas del reloj para determinar la longitud de la línea.

Luego, la adaptación se termina desplazando el punto hasta el centro de la carta. Si seguimos la curva de parte imaginaria constante hasta la parte exterior de la carta, para medir la distancia que hay que recorrer desde el punto que nos corresponda (*stub* terminado en cortocircuito o en circuito abierto). En nuestro caso hemos tomado el *stub* terminado en circuito abierto.

3.4.3.3 *Stub* en paralelo

Ahora, para el *stub* en paralelo la única diferencia es que hay que trabajar con admitancias, por lo que el primer paso después de colocar \bar{Z}_L en el diagrama, es invertirla para tener \bar{Y}_L y hacer el mismo proceso con admitancias. También hay diferencia en que los puntos de cortocircuito y circuito abierto están intercambiados. Tenemos la carta de Smith de este caso en la figura (3.22).

3.5 Adaptación de impedancias reales en banda ancha

Ahora vamos a ver los dos métodos que mencionamos en la clasificación para aplicaciones de banda ancha. Recordemos que eran:

1. Transformador en $\lambda/4$ multisección
2. *Tapers* o líneas de transmisión no uniformes

Recordemos también que no es posible conseguir máxima transferencia de potencia disponible de un generador en un ancho de banda finito continuo, lo cual nos impone un límite teórico que nos obligará a reducir la potencia transmitida.

3.5.1 Transformador en $\lambda/4$ multisección

Para un solo transformador en $\lambda/4$, teníamos el circuito de la figura (3.3) y la función de transferencia que vemos en la figura (3.4), lo cual representaba una transformación de banda estrecha.

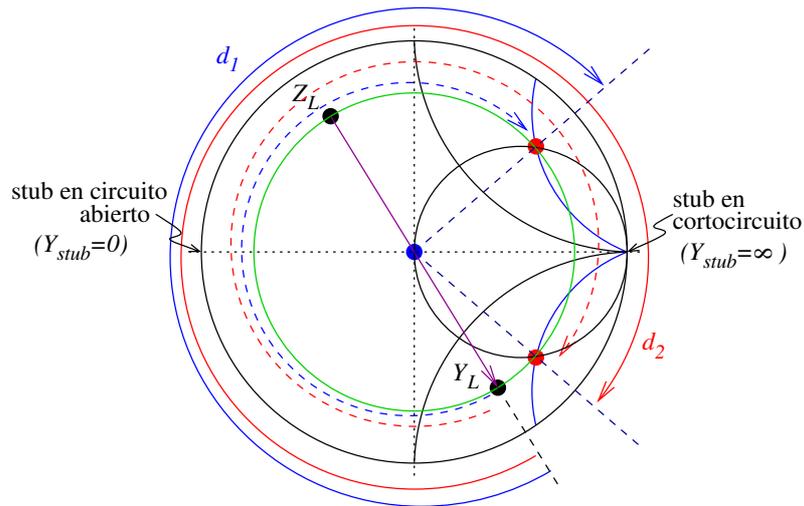


Figura 3.22: Carta de Smith para la adaptación con línea y stub en paralelo

Ya mencionamos que haciendo la transformación de forma progresiva se conseguía minimizar el efecto de la desadaptación inicial.

En la figura (3.23) tenemos el esquema para un adaptador multisección con 4 etapas de transformadores en $\lambda/4$. Observamos que todas tienen la misma longitud y distinta impedancia característica. Cada una de las impedancias características adapta a la anterior, de forma que la que tiene que adaptar cada una es menor que la total.

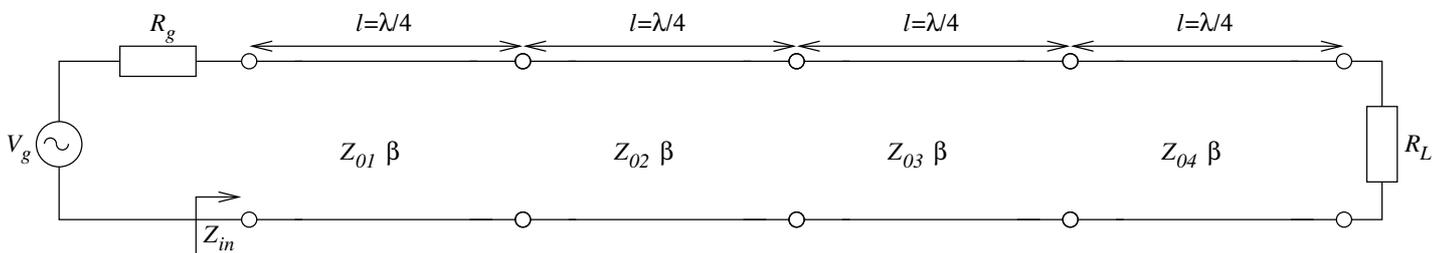


Figura 3.23: Transformación en $\lambda/4$ multisección con 4 etapas

Esto se puede observar con claridad en la figura (3.24), donde se muestra en rojo la curva para la función de transferencia del transformador en $\lambda/4$ que vimos anteriormente y en azul la de un transformador multisección. Se ve claramente que el valor máximo de $|\rho_{in}|$ es menor que en el otro caso, por lo que el ancho de banda en el que se cumple nuestra condición de $|\rho_{in}|$ máximo permitido es mayor.

Los parámetros a considerar en este adaptador serán:

- N , el número de etapas
- Z_{oi} , las impedancias características de cada etapa

Existe un inconveniente importante asociado con el hecho de que hay discontinuidades, y es el que vimos en el tema anterior, que hay propagación de modos superiores si se trabaja a frecuencias cercanas a la de corte de dichos modos.

Podemos encontrar muchos tipos de soluciones, según las condiciones que imponamos. Dos casos particulares de interés son los que vemos a continuación.

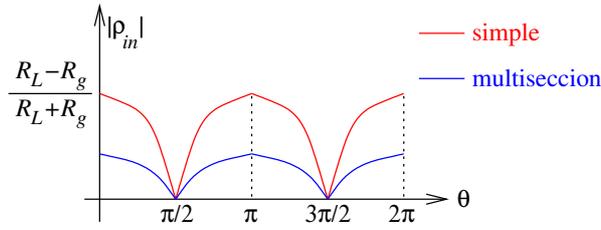


Figura 3.24: Función de transferencia para el transformador en $\lambda/4$ multisección comparada con el transformador en $\lambda/4$ simple

3.5.1.1 Solución de Butterworth

También llamado transformador maximalmente plano, persigue que $|\rho_{in}|$ sea maximalmente plano en torno a la frecuencia de trabajo.

Para ello, siendo N el número de etapas, se debe cumplir, a la frecuencia central f_0 ,

$$|\rho_{in}| = 0$$

$$\frac{\partial^{N-1}}{\partial f^{N-1}} |\rho_{in}| = 0$$

El diseño se hará igual que en el diseño de filtros de teoría de circuitos, con **tablas**, con las cuales se obtendrán los valores de Z_{oi} según el orden (N) que tengamos.

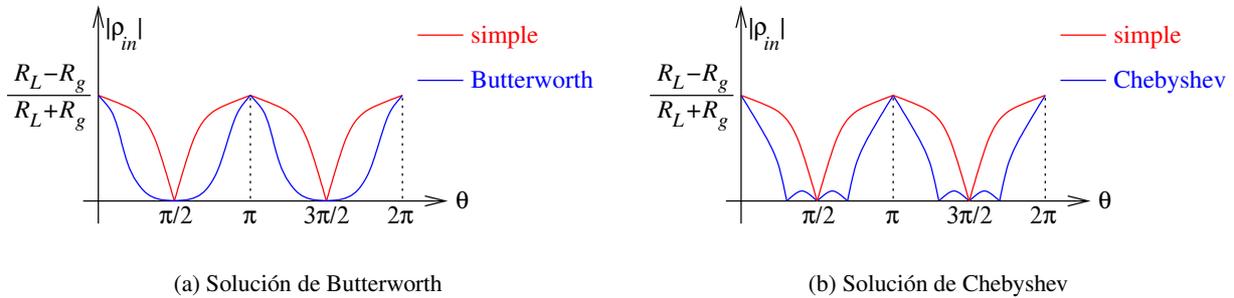


Figura 3.25: Función de transferencia para el transformador en $\lambda/4$ multisección con solución de (a) Butterworth y (b) Chebyshev

3.5.1.2 Solución de Chebyshev

En este caso se admite un cierto rizado en la zona cercana a la frecuencia central. Esta solución se diseña de la misma forma que la anterior, con tablas.

En la figura (3.25) tenemos la forma de las funciones de transferencia para los transformadores multisección de Butterworth y Chebyshev. Observamos el rizado en la de Chebyshev, con 3 nulos, lo que indica que $N = 3$.

La solución de Chebyshev permite un $|\rho_{in_{max}}|$ menor que Butterworth para el mismo número de etapas.

Si nos importa más el entorno cercano a la frecuencia central, usaremos una solución de Butterworth, mientras que si nos interesa más una banda algo más amplia, usaremos Chebyshev.

3.5.2 Tapers

Esta solución lo que trata es de hacer lo mismo, realizar una transformación gradual. En este caso lo que varía gradualmente es la Z_0 de la línea. Para ello se fabrica una **línea de transmisión no uniforme**, con una transición lo más suave posible.

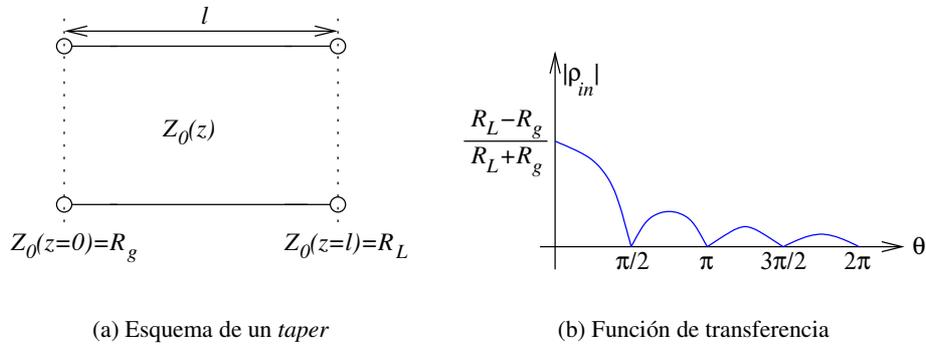


Figura 3.26: (a) Esquema de un taper y (b) Función de transferencia

Para que dicha transición sea suave, debe cumplirse $l \gg \lambda$. Por tanto, lo que se tiene es una solución paso alto, ya que cuanto mayor es la frecuencia, mejor funciona (más suave es la transición).

Un ejemplo de implementación es el que vemos en la figura (3.27), en el cual la línea de transmisión es un cable coaxial cuyo conductor exterior tiene radio constante y el conductor interior tiene un radio decreciente con z , por lo que su impedancia característica crece con z , y por tanto está hecho para el caso en que $R_L > R_g$.

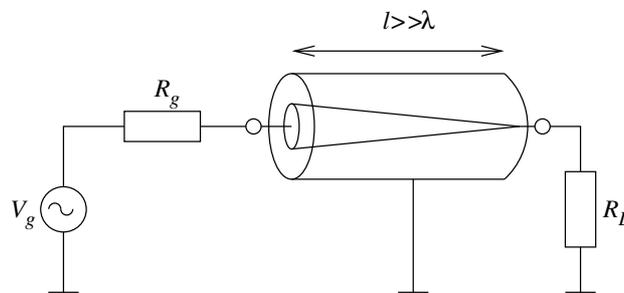


Figura 3.27: Taper con un coaxial cuyo conductor interior tiene radio decreciente ($R_L > R_g$)

La variable de diseño será ahora la **ley de variación de Z_0** con la distancia. Tenemos dos casos, que son las líneas de variación lineal con la distancia y las de variación exponencial. Las segundas son mejores, ya que para una determinada longitud, $|\rho_{in}|$ es menor que en las lineales.

Tiene las siguientes **ventajas** sobre el transformador multisección:

- ⤷ No hay discontinuidades
- ⤷ Es más fácil de fabricar en tecnología planar
- ⤷ No hay reflexiones, luego disminuye la potencia disipada

Por contra, tiene los siguientes **inconvenientes**:

- ⇒ Ocupa mucho espacio, ya que $l \gg \lambda$. Fijando un $|\rho_{in_{max}}|$, la red multisección es más pequeña
- ⇒ Es más difícil de fabricar en tecnología coaxial

Ondas guiadas

4.1 Planteamiento del problema

En este tema vamos a completar el estudio de la transmisión de información con soporte físico. Consideraremos sistemas cerrados por conductores con dieléctrico homogéneo, como el que vemos en la figura (4.1), que es un sistema en forma de cilindro recto de sección transversal arbitraria, con dirección de invarianza de las condiciones de contorno z . No sabemos lo que hay en los extremos, y de momento no nos preocupa. En el interior encontramos un medio dieléctrico homogéneo lineal e isótropo sin fuentes de campo.

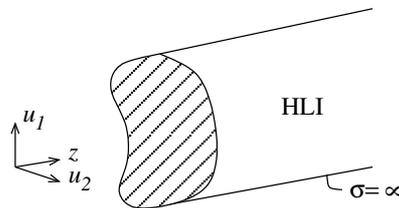


Figura 4.1: Planteamiento: sección transversal arbitraria de un dieléctrico rodeado por conductor perfecto

El problema será encontrar el campo electromagnético en ese cilindro. Usaremos un sistema de coordenadas con simetría de traslación, por lo que obtendremos una solución válida para cualquier estructura con simetría de traslación.

Las ecuaciones de Maxwell para un medio homogéneo, lineal e isótropo sin fuentes

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon\vec{E} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Desacoplamos los campos \vec{E} y \vec{H} haciendo el rotacional del rotacional:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\nabla \times \vec{H} = \omega^2\mu\varepsilon\vec{E}$$

Usando la siguiente identidad del cálculo diferencial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

Y dado que no hay fuentes, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y nos queda la siguiente expresión

$$\boxed{\Delta \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0} \quad (4.2)$$

O bien la forma generalizada, tomando $\gamma_0^2 = -\omega^2 \mu \epsilon$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \gamma_0^2 \vec{E} = 0} \quad (4.3)$$

Y se puede obtener de la misma forma para el campo magnético

$$\boxed{\Delta \vec{H} - \gamma_0^2 \vec{H} = 0} \quad (4.4)$$

Podemos descomponer el campo eléctrico en 3 componentes, según cada una de las coordenadas espaciales:

$$\vec{E}(u_1, u_2, z) = E_1(u_1, u_2, z) \cdot \hat{u}_1 + E_2(u_1, u_2, z) \cdot \hat{u}_2 + E_3(u_1, u_2, z) \cdot \hat{z} \quad (4.5)$$

De donde se pueden extraer 2 vectores:

⇒ **Componente longitudinal:**

$$\vec{E}_z(u_1, u_2, z) = E_z(u_1, u_2, z) \cdot \hat{z} \quad (4.6)$$

⇒ **Componente transversal:**

$$\vec{E}_t(u_1, u_2, z) = E_1(u_1, u_2, z) \cdot \hat{u}_1 + E_2(u_1, u_2, z) \cdot \hat{u}_2 \quad (4.7)$$

Con lo que la expresión para el vector campo eléctrico se reduce a dos componentes

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z$$

Y de la misma forma se puede obtener para el campo magnético

$$\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{H}_z$$

Por tanto, la solución de nuestro problema implica resolver 6 campos escalares en tres dimensiones. Sin embargo, \vec{E} y \vec{H} están ligados, por lo que realmente habrá que calcular sólo uno de ellos (3 campos escalares).

Podemos hacer una simplificación más, gracias a la simetría de traslación, rompiendo las ecuaciones de onda en dos:

$$\Delta \vec{E} = \Delta (\vec{E}_t + \vec{E}_z) = \Delta \vec{E}_t + \Delta \vec{E}_z$$

Tenemos un vector transversal, $\Delta \vec{E}_t$, y uno longitudinal, $\Delta \vec{E}_z$. Ahora lo que hay que hacer es buscar un solo campo escalar tridimensional, el campo longitudinal, que hará de variable independiente para calcular luego el campo transversal a partir de aquel.

Además, con la clasificación en modos que veremos posteriormente, buscaremos la solución para cada modo en lugar de la solución general. Esta solución general será la combinación lineal de las soluciones para cada modo.

$$\Delta \vec{E} - \gamma_0^2 \vec{E} = 0 = \Delta \vec{E}_t + \Delta \vec{E}_z - \gamma_0^2 \vec{E}_t - \gamma_0^2 \vec{E}_z \quad (4.8)$$

Es fácil comprobar que para que se cumpla esta ecuación de onda, tanto la componente transversal como la longitudinal tienen que cumplirla por separado, quedando dos ecuaciones de onda.

⇒ Ecuación transversal:

$$\Delta \vec{E}_t - \gamma_0^2 \vec{E}_t = 0$$

⇒ Ecuación longitudinal:

$$\Delta \vec{E}_z - \gamma_0^2 \vec{E}_z = 0 \Rightarrow \hat{z} \cdot (\Delta E_z - \gamma_0^2 E_z) = 0$$

con lo que nos queda una ecuación escalar, sin vectores:

$$\Delta E_z - \gamma_0^2 E_z = 0$$

Podemos hacer además otra separación, ya que se verifica matemáticamente

$$\Delta \vec{E}_t = \Delta_t \vec{E}_t + \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} \quad (4.9)$$

$$\Delta \vec{E}_z = \Delta_t \vec{E}_z + \frac{\partial^2 \vec{E}_z}{\partial z^2} \quad (4.10)$$

Siendo Δ_t la laplaciana con respecto a las coordenadas transversales.

Por tanto las **ecuaciones a resolver** son

$$\begin{aligned} \Delta_t \vec{E}_t + \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} - \gamma_0^2 \vec{E}_t &= 0 \\ \Delta_t E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \gamma_0^2 E_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_t \vec{H}_t + \frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} - \gamma_0^2 \vec{H}_t &= 0 \\ \Delta_t H_z + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} - \gamma_0^2 H_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para encontrar solución única necesitamos la condición de contorno en toda la superficie que rodea a la región de interés, es decir, el campo tangencial \vec{E}_T . Si conocemos ese campo tangencial en toda la superficie, conocemos el campo en toda la región.

⇒ En las tapas es transversal: \vec{E}_t

⇒ En la superficie lateral tiene dos componentes, transversal y longitudinal: \vec{E}_t, \vec{E}_z

Conocemos pues la componente transversal en toda la superficie y con ello podemos calcular el campo transversal, pero para la componente longitudinal sólo conocemos la que hay en la superficie lateral (conductor). Esto puede hacernos pensar que falla algo, pero realmente el campo transversal y el longitudinal no son independientes, por lo que el valor de \vec{E}_z que tengamos determina el de \vec{E}_t y viceversa.

Podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell descomponiendo la divergencia en la divergencia transversal y la longitudinal, quedando la primera

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow (\nabla_t + \nabla_z) \cdot (\vec{E}_t + \vec{E}_z) = 0 \Rightarrow \nabla_t \cdot \vec{E}_t + \nabla_t \cdot \vec{E}_z + \nabla_z \cdot \vec{E}_t + \nabla_z \cdot \vec{E}_z = 0$$

Dado que $\nabla_t \cdot \vec{E}_z = \nabla_z \cdot \vec{E}_t = 0$, nos queda finalmente

$$\boxed{\nabla_t \cdot \vec{E}_t + \nabla_z \cdot \vec{E}_z = 0} \quad (4.13)$$

Se puede hacer de la misma forma para la segunda

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

obteniéndose

$$\boxed{\nabla_t \cdot \vec{H}_t + \nabla_z \cdot \vec{H}_z = 0} \quad (4.14)$$

Para la del rotacional del campo eléctrico volvemos a aplicar lo mismo

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= (\nabla_t + \nabla_z) \times (\vec{E}_t + \vec{E}_z) = -j\omega\mu (\vec{H}_t + \vec{H}_z) \\ \nabla_t \times \vec{E}_t + \nabla_t \times \vec{E}_z + \nabla_z \times \vec{E}_t + \nabla_z \times \vec{E}_z &= -j\omega\mu \vec{H}_t - j\omega\mu \vec{H}_z \end{aligned}$$

Dado que $\nabla_t \times \vec{E}_t$ y \vec{H}_z son longitudinales, $\nabla_t \times \vec{E}_z$, $\nabla_z \times \vec{E}_t$ y \vec{H}_t transversales y $\nabla_z \times \vec{E}_z = 0$, finalmente nos queda

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_t \times \vec{E}_t &= -j\omega\mu \vec{H}_z \\ \nabla_t \times \vec{E}_z + \nabla_z \times \vec{E}_t &= -j\omega\mu \vec{H}_t \end{aligned}} \quad (4.15)$$

Esto es aplicable también al rotacional del campo magnético, obteniéndose

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_t \times \vec{H}_t &= j\omega\varepsilon \vec{E}_z \\ \nabla_t \times \vec{H}_z + \nabla_z \times \vec{H}_t &= j\omega\varepsilon \vec{E}_t \end{aligned}} \quad (4.16)$$

La ecuación del campo eléctrico transversal que vimos antes es

$$\Delta_t \vec{E}_t + \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} - \gamma_0^2 \vec{E}_t = 0$$

Dado que la laplaciana la podemos escribir

$$\Delta_t \vec{E}_t = \nabla_t \cdot \underbrace{(\nabla_t \cdot \vec{E}_t)}_{-\nabla_z \cdot \vec{E}_z} - \nabla_t \times \underbrace{(\nabla_t \times \vec{E}_t)}_{-j\omega\mu \vec{H}_z}$$

Quedando finalmente la siguiente ecuación

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} - \gamma_0^2 \vec{E}_t = \nabla_t (\nabla_z \cdot \vec{E}_z) - j\omega\mu \nabla_t \times \vec{H}_z} \quad (4.17)$$

Es decir, que podemos calcular la componente transversal del campo eléctrico conociendo las componentes longitudinales de los campos eléctrico y magnético.

Hemos considerado un medio homogéneo, en el que μ no depende de las coordenadas y por tanto se puede extraer del rotacional.

De la misma forma, para el campo magnético transversal

$$\Delta_t \vec{H}_t + \frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} - \gamma_0^2 \vec{H}_t = 0$$

Esta vez $\nabla_t \cdot \vec{H}_t = -\nabla_z \cdot \vec{H}_z$ y $\nabla_t \times \vec{H}_t = j\omega\varepsilon \vec{E}_z$, con lo que al final es

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} - \gamma_0^2 \vec{H}_t = \nabla_t (\nabla_z \cdot \vec{H}_z) + j\omega\varepsilon (\nabla_t \times \vec{E}_z)} \quad (4.18)$$

Considerando de nuevo un medio homogéneo para poder sacar ε del rotacional.

Por tanto, también podemos calcular la componente transversal del campo magnético a partir de las componentes longitudinales de los campos eléctrico y magnético.

4.2 Clasificación en modos

Una vez planteado el problema, resolverlo considerando el caso general

$$\vec{E}_z \neq 0 \quad \vec{H}_z \neq 0$$

es muy complicado. Lo que se hace es resolverlo como combinación lineal de 3 problemas elementales

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_z \neq 0 \\ H_z = 0 \end{array} \right. \text{ TM} \\ 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ H_z \neq 0 \end{array} \right. \text{ TE} \\ 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ H_z = 0 \end{array} \right. \text{ TEM} \end{array} \quad (4.19)$$

La resolución de cada uno es:

1. Se encuentra \vec{E}_z haciendo $H_z = 0$, obteniéndose los campos transversales \vec{H}_t y \vec{E}_t , para el modo TM
2. Se hace $E_z = 0$, se encuentra \vec{H}_z y a partir de él los campos transversales \vec{H}_t y \vec{E}_t del modo TE
3. Por último, $H_z = E_z = 0$, de donde se calculan otros campos transversales \vec{H}_t y \vec{E}_t , los del modo TEM

$$\text{solucion} = \sum_{N-1} \text{TEM} + \sum_{\infty} \text{TM} + \sum_{\infty} \text{TE}$$

Esta solución se obtiene imponiendo condiciones de contorno sólo en la superficie lateral que delimita la estructura y que hemos supuesto de conductor perfecto.

Existen infinitos modos TE y TM, mientras que hay $N - 1$ modos TEM, siendo N el número de conductores de los que consta la estructura. Por tanto, con un solo conductor no puede haber modo TEM.

Esto es válido para cualquier sistema con simetría de traslación, como puede ser un cable coaxial o incluso una fibra óptica.

Para los modos vamos a tener una propagación en la dirección del eje z , justamente la de invarianza de las condiciones de contorno.

4.2.1 Modos TM

Recordemos que este es el caso de

$$H_z = 0 \quad E_z \neq 0$$

Tenemos la siguiente definición del problema a resolver

$$\Delta_t E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \gamma_0^2 E_z = 0 \quad + \quad \text{condiciones de contorno en la superficie lateral}$$

Sabemos que el contorno es de conductor perfecto, por lo que la condición de contorno en la superficie es

$$\hat{n} \times \vec{E} \Big|_{\text{conductor}} = 0 \quad (4.20)$$

siendo como ya sabemos \hat{n} el vector normal a la superficie lateral. Esto implica

$$\hat{n} \times (\vec{E}_t + \vec{E}_z) \Big|_{conductor} = 0 \quad (4.21)$$

Por tanto podemos descomponerla en dos condiciones de contorno

$$\hat{n} \times \vec{E}_t \Big|_{conductor} = 0$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_z \Big|_{conductor} = 0$$

La que vamos a imponer es la segunda

$$\hat{n} \times \vec{E}_z \Big|_{conductor} = 0$$

Que, dado que $\vec{E}_z = \hat{z} \cdot E_z$, queda

$$\boxed{\hat{n} \times E_z \Big|_{conductor} = 0} \quad (4.22)$$

Sin olvidarnos que está la otra. De todas formas, al cumplirse (4.22), se cumple esta cuando calculemos el campo.

Usando el método de separación de variables, planteamos la siguiente solución

$$E_z(u_1, u_2, z) = F_E(u_1, u_2) \cdot Z(z) \quad (4.23)$$

Que al introducirla en la ecuación, queda

$$\Delta_t(F_E \cdot Z) + \frac{\partial^2(F_E \cdot Z)}{\partial z^2} - \gamma_0^2 F_E \cdot Z = 0$$

Al no depender Z de las coordenadas transversales ni F_E de la coordenada z ,

$$Z \cdot \Delta_t F_E + F_E \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \gamma_0^2 F_E \cdot Z = 0$$

Dividiendo por $F_E \cdot Z$, obtenemos

$$\frac{\Delta_t F_E}{F_E} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \gamma_0^2 = 0$$

Y escribiendo por último

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = Z''$$

se obtiene la ecuación que hay que resolver para el campo

$$\boxed{\frac{\Delta_t F_E}{F_E} + \frac{Z''}{Z} - \gamma_0^2 = 0} \quad (4.24)$$

Si nos movemos en z , sólo varía el término Z''/Z , y dado que tanto γ_0^2 como $\frac{\Delta_t F_E}{F_E}$ son constantes en z , llegamos a la conclusión de que Z''/Z también es constante. El mismo razonamiento sirve para obtener que $\frac{\Delta_t F_E}{F_E}$ es constante. Por tanto

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\Delta_t F_E}{F_E} &= cte_1 = \gamma_0^2 - \gamma^2 \\ \frac{Z''}{Z} &= cte_2 = \gamma^2 \end{aligned}} \quad (4.25)$$

Estas serán finalmente las ecuaciones que tengamos que resolver.

Para la segunda se obtiene una solución con forma exponencial,

$$e^{\pm\gamma z}$$

Es decir,

$$Z(z) = Q e^{\pm\gamma z}$$

Por lo que el campo toma la forma

$$E_z = F_E(u_1, u_2) e^{\pm\gamma z}$$

Donde γ es la constante de propagación del modo.

A esta primera solución le aplicamos la condición de contorno:

$$F_E \cdot Z|_{\text{conductor}} = 0$$

como se cumple para todo z , entonces

$$F_E|_{\text{conductor}} = 0$$

Es la nueva condición de contorno, por lo que ahora la primera ecuación es

$$\Delta_t F_E - \gamma_c^2 F_E = 0 \quad \text{donde } F_E|_{\text{conductor}} = 0$$

Siendo

$$\boxed{\gamma_c^2 = \gamma_0^2 - \gamma^2} \quad (4.26)$$

Esta ecuación tiene solución distinta de la trivial sólo para valores discretos de γ_c^2 , por lo que se trata de un problema de autovalores. Por tanto, tendremos infinitas soluciones para infinitos valores de γ_c^2 . Es un problema en dos dimensiones, ya que la variación con z es la propia de un fenómeno de propagación.

⇒ γ_c^2 son los autovalores

⇒ F_E es la función generadora de los modos TM

No se puede resolver completamente sin conocer la forma de la sección transversal, por lo que habrá que particularizar cada caso.

Podemos describir el **proceso** a seguir para resolver los modos TM como sigue:

1. Plantear el problema para la geometría concreta
2. Obtener las infinitas soluciones del par γ_c^2, F_E
3. Calcular la constante de propagación $\gamma^2 = \gamma_0^2 - \gamma_c^2$
4. Con la constante de propagación antes calculada,

$$E_z = F_E e^{\mp\gamma z}$$

5. A partir de E_z obtener \vec{E}_t y \vec{H}_t :

a) En primer lugar, la **componente transversal del campo eléctrico**, \vec{E}_t :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} - \gamma_0^2 \vec{E}_t = \nabla_t \left(\nabla_z \cdot \vec{E}_z \right) - j\omega\mu \underbrace{\nabla_t \times \vec{H}_z}_0$$

así que tenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} - \gamma_0^2 \vec{E}_t = \nabla_t \left(\nabla_z \cdot \vec{E}_z \right)$$

de donde obtendremos una solución homogénea y una particular. Para ello, planteamos una solución con la forma

$$\nabla_t \left(\nabla_z \cdot \vec{E}_z \right)$$

siendo

$$\vec{E}_z = \hat{z} \cdot E_z \quad E_z = F_E e^{-\gamma z}$$

donde hemos supuesto propagación en dirección \hat{z} (signo menos). Entonces,

$$\nabla_t \left(\nabla_z \cdot \vec{E}_z \right) = \nabla_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \nabla_t (-\gamma E_z) = -\gamma \nabla_t E_z$$

En la ecuación plantearemos

$$\vec{E}_t = A \cdot \nabla_t E_z$$

por tanto,

$$A \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla_t E_z) - \gamma_0^2 A \nabla_t E_z = -\gamma \nabla_t E_z$$

$$A \nabla_t \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) = -\gamma A \nabla_t E_z \Rightarrow \gamma^2 A - \gamma_0^2 A = -\gamma$$

Con lo que obtenemos el valor de A :

$$A = \frac{\gamma}{\gamma_0^2 - \gamma^2} = \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \quad (4.27)$$

Así, que, finalmente, el campo transversal será

$$\vec{E}_t = \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \nabla_t E_z \quad (4.28)$$

Es lógico que venga de un gradiente, ya que

$$\nabla_t \times \vec{E}_t = -j\omega\mu \vec{H}_z = 0$$

Es decir, que \vec{E}_t es irrotacional. Al imponer la condición de contorno para el campo eléctrico

$$\hat{n} \times \vec{E} \Big|_{conductor} = 0$$

Se obtienen dos condiciones de contorno por separado

$$E_z \Big|_{conductor} = 0$$

y

$$\hat{n} \times \vec{E}_t \Big|_{conductor} = 0$$

es decir, que el gradiente de E_z es normal a la sección transversal (paralelo a \hat{n}). Por tanto, como $E_z \Big|_{conductor} = 0$, se garantiza que $\hat{n} \times \vec{E}_t = 0$ en el conductor, como habíamos supuesto al principio.

b) En cuanto al **campo magnético transversal**, \vec{H}_t , tenemos

$$\nabla_z \times \vec{E}_t + \nabla_t \times \vec{E}_z = -j\omega\mu\vec{H}_t$$

por lo que despejando \vec{H}_t ,

$$\begin{aligned}\vec{H}_t &= -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \times \vec{E}_t + \nabla_t \times \hat{z} E_z \right) \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\hat{z} \cdot (-\gamma) \times \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \nabla_t E_z - \hat{z} \times \nabla_t E_z \right) \\ &= \frac{1}{j\omega\mu} (\hat{z} \times \nabla_t E_z) \left(1 + \frac{\gamma^2}{\gamma_c^2} \right) \\ &= \frac{\hat{z} \times \nabla_t E_z}{j\omega\mu} \frac{\gamma_0^2}{\gamma_c^2}\end{aligned}$$

Dado que

$$\gamma_0^2 = -\omega^2\mu\varepsilon = j\omega^2\mu\varepsilon$$

se tiene

$$\vec{H}_t = \frac{j\omega\varepsilon\hat{z} \times \nabla_t E_z}{\gamma_c^2}$$

Y como

$$\vec{E}_t = \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \nabla_t E_z$$

la expresión final para el campo magnético transversal es

$$\boxed{\vec{H}_t = \frac{\hat{z} \times \vec{E}_t}{\frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}}} \quad (4.29)$$

Formalmente, tenemos lo mismo que en modos TEM, una **impedancia del modo TM**:

$$\boxed{Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}} \quad (4.30)$$

4.2.2 Modos TE

Ahora es nula la componente longitudinal del campo eléctrico:

$$E_z = 0 \quad H_z \neq 0$$

En este caso, el problema será

$$\Delta_t H_z + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} - \gamma_0^2 H_z = 0 \quad + \quad \text{condiciones de contorno en la superficie lateral}$$

Ahora la condición de contorno quedará un poco distinta, al ser $E_z = 0$:

$$\hat{n} \times \vec{E} \Big|_{conductor} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{n} \times (\vec{E}_t + \vec{E}_z) \Big|_{conductor} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{n} \times \vec{E}_t \Big|_{conductor} = 0$$

El problema se resuelve igual que antes, por separación de variables, obteniendo una solución de la forma

$$H_z = F_H(u_1, u_2) Z(z) = F_H e^{\mp\gamma z}$$

El problema será el mismo que antes, con la diferencia de la condición de contorno. Es decir, que tenemos que calcular unos autovalores γ_c^2 y unos autovectores F_H en

$$\Delta_t F_H - \gamma_c^2 F_H = 0$$

Con ellos, se calcula γ de la misma forma que antes y se obtienen las infinitas soluciones para

$$H_z = F_H e^{-\gamma z}$$

Del campo magnético longitudinal se obtiene el magnético transversal y también el eléctrico transversal

$$\boxed{\vec{H}_t = \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \nabla_t H_z} \quad (4.31)$$

Como ya sabíamos, el campo magnético transversal es irrotacional, ya que

$$\nabla_t \times \vec{H}_t = j\omega \varepsilon \vec{E}_z = 0$$

Para el campo eléctrico

$$\boxed{\vec{E}_t = Z_{TE} (\vec{H}_t \times \hat{z})} \quad (4.32)$$

Donde se ha definido la **impedancia del modo TE**

$$\boxed{Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}} \quad (4.33)$$

La condición de contorno la buscamos a partir de

$$\hat{n} \times \vec{E}_t \Big|_{\text{contorno}} = 0$$

Para H_z será

$$\hat{n} \times Z_{TE} (\vec{H}_t \times \hat{z}) \Big|_{\text{contorno}} = 0$$

Que se puede descomponer en dos sumandos

$$\vec{H}_t (\hat{n} \cdot \hat{z}) - \hat{z} (\hat{n} \cdot \vec{H}_t) \Big|_{\text{contorno}} = 0$$

Como tenemos la siguiente condición de contorno:

$$\hat{n} \cdot \vec{H}_t \Big|_{\text{contorno}} = 0$$

Entonces, nos queda

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_0^2} \nabla_t H_z \Big|_{\text{contorno}} &= 0 \\ \hat{n} \cdot \nabla_t H_z \Big|_{\text{contorno}} &= 0 \end{aligned}$$

Esto se convierte en

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_{\text{conductor}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial (F_H Z)}{\partial n} \Big|_{\text{conductor}} = 0$$

Dado que se debe cumplir a lo largo de todo el cilindro, es independiente de z y por ello de Z , así que la condición de contorno es, finalmente,

$$\left. \frac{\partial F_H}{\partial n} \right|_{\text{conductor}} = 0 \quad (4.34)$$

Donde $\partial/\partial n$ es la derivada direccional en la dirección de la normal al conductor.

Es decir, que esta es la condición de contorno que debemos imponer para resolver el problema de autovalores dado por

$$\Delta_t F_H - \gamma_c^2 F_H = 0 \quad (4.35)$$

4.2.3 Resumen de los modos TM y TE

Para obtener los modos TM se siguen los siguientes pasos:

1. En primer lugar, se resuelve el problema de autovalores

$$\Delta_t F_E - \gamma_c^2 F_E = 0$$

sujeto a la condición de contorno

$$F_E|_{\text{conductor}} = 0 \quad (4.36)$$

Las incógnitas son los autovalores γ_c^2 y las autofunciones F_E .

Puede ocurrir que un autovalor γ_c^2 tenga más de una autofunción F_E , lo que se conoce como **modo degenerado**.

2. Se obtiene la constante de propagación del modo, γ

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 - \gamma_c^2 \quad (4.37)$$

con lo que la componente longitudinal del campo eléctrico ya la tenemos

$$E_z = F_E e^{\mp \gamma z} \quad (4.38)$$

3. A partir de la componente longitudinal del campo eléctrico, se obtiene la componente tangencial del campo eléctrico

$$\vec{E}_t = \pm \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \nabla_t E_z \quad (4.39)$$

y con ella la del campo magnético

$$\vec{H}_t = \frac{(\pm \hat{z}) \times \vec{E}_t}{Z_{TM}} \quad (4.40)$$

donde Z_{TM} es la impedancia del modo, que viene dada por la expresión

$$Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \quad (4.41)$$

De forma similar, se obtienen los modos TE, con la diferencia fundamental de la condición de contorno que hay que aplicar:

1. En primer lugar, se resuelve el problema de autovalores

$$\Delta_t F_H - \gamma_c^2 F_H = 0 \quad (4.42)$$

sujeto a

$$\left. \frac{\partial F_H}{\partial n} \right|_{\text{conductor}} = 0 \quad (4.43)$$

2. Calcular la constante de propagación del modo

$$\gamma = \gamma_0^2 - \gamma_c^2 \quad (4.44)$$

y a partir de ella la componente longitudinal del campo magnético

$$H_z = F_H e^{\mp \gamma z} \quad (4.45)$$

3. Con esa componente longitudinal se obtiene la tangencial del campo magnético

$$\vec{H}_t = \pm \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \nabla_t H_z \quad (4.46)$$

y también la del campo eléctrico

$$\vec{E}_t = Z_{TE} \left(\vec{H}_t \times (\pm \hat{z}) \right) \quad (4.47)$$

Siendo Z_{TE} la impedancia del modo TE, dada por la expresión

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (4.48)$$

4.2.4 Características de propagación de los modos

4.2.4.1 Constante de propagación del modo

Siendo γ la **constante de propagación** del modo, determina completamente las características de propagación de ese modo.

En los modos TEM, la constante de propagación es

$$\gamma_{TEM} = \gamma_0 = \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon}$$

Variable con la frecuencia y dependiente del dieléctrico, pero no de la geometría del problema.

En cambio, en los modos TE y TM tenemos

$$\gamma_{TE \text{ o } TM} = \sqrt{\gamma_0^2 - \gamma_c^2} = \alpha + j\beta \quad (4.49)$$

Donde γ_0^2 varía con la frecuencia y es dependiente del dieléctrico, mientras que γ_c^2 es dependiente de la geometría del problema.

Por tanto, la constante de propagación de los modos TE y TM depende de la geometría que estemos considerando, y por tanto también dependen de ella las características de propagación de dichos modos.

4.2.4.2 Longitud de onda del modo

En cuanto a la **longitud de onda del modo**, sabemos que viene dada por la expresión

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (4.50)$$

Y esta expresión es válida en toda estructura de campo. En cambio, no se podrá usar la expresión

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

ya que sólo es válida en modo TEM.

Esto se debe a que

$$\beta_{TE \text{ o } TM} \neq \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

mientras que en un modo TEM, $\beta_{TEM} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ y por tanto

$$\lambda_{TEM} = \frac{2\pi}{\beta_{TEM}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{f} \quad (4.51)$$

Por ello, habría que considerar la geometría para poder caracterizar los modos .

En el caso que hemos estudiado, estamos considerando conductor perfecto, por lo que se puede demostrar que **todos los autovalores γ_c^2 son reales y negativos**. Esto es debido a que no hay pérdidas en los conductores.

Podemos con esto estudiar las características de propagación de los modos TE y TM.

$$\gamma^2 = -\omega^2\mu\varepsilon + (-\gamma_c^2)$$

4.2.4.3 Dieléctrico sin pérdidas

En este caso, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y la constante de propagación al cuadrado (γ^2) nos queda como suma de una componente real negativa ($\omega^2\mu\varepsilon$) y otra real positiva ($-\gamma_c^2$).

Entonces, dado que γ^2 es real, γ sólo puede ser real o imaginario puro:

- ⤴ $\gamma \in \mathbb{R}$: entonces $\gamma = \alpha$. Se da cuando $-\gamma_c^2 > \omega^2\mu\varepsilon$
- ⤴ $\gamma \in \mathbb{C}$: entonces $\gamma = j\beta$. Lo tenemos si $-\gamma_c^2 < \omega^2\mu\varepsilon$

La transición ocurre cuando $-\gamma_c^2 = \omega^2\mu\varepsilon$, lo cual sucede cuando la frecuencia de trabajo es igual a la **frecuencia de corte del modo**:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{-\gamma_c^2}{\mu\varepsilon}}$$

Cada modo tiene su propia frecuencia de corte, ya que es dependiente de γ_c^2 .

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-\gamma_c^2}{\mu\varepsilon}} \quad (4.52)$$

Sólo hay propagación en la estructura para el modo correspondiente si la frecuencia de trabajo es superior a la de corte del modo. Se distinguen por tanto dos zonas:

- ▷ **Corte:** cuando la frecuencia es inferior a la de corte del modo, $\gamma = \alpha$ y no hay propagación de energía
- ▷ **Propagación:** cuando la frecuencia es mayor que la de corte, $\gamma = j\beta$ y tenemos transmisión de potencia en ese modo

Cuando estamos en corte no significa que haya pérdidas, simplemente no se propaga ni se disipa energía. Lo que hay son campos eléctricos y magnéticos desfasados.

La frecuencia de corte del modo también caracteriza totalmente al modo.

Podemos ver cómo quedaría el **diagrama de dispersión** para el modo, analizando lo que ocurre en ambos casos:

- ▷ $f > f_c$: $\alpha = 0$, $\gamma = j\beta$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \omega_c^2 \mu \epsilon} \quad (4.53)$$

A $f = f_c$, $\beta = 0$, mientras que si $f > f_c$, β se incrementa. Si $f \gg f_c$, β se aproxima a la del TEM: $\beta \simeq \beta_{TEM}$. Podemos ver cuál es el lugar geométrico que describe la β :

$$\frac{\beta^2}{\omega_c^2 \mu \epsilon} - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = -1 \quad (4.54)$$

Claramente se trata de una hipérbola. El efecto es una dispersión en la fase:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \beta_{TEM} FG \quad (4.55)$$

Hemos llamado a $FG = \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$ **factor de guiado**. Este factor nos dice cómo se modifica la constante de fase del modo con la frecuencia.

La **longitud de onda** en los modos TE o TM es

$$\lambda = \frac{c}{f} \frac{1}{FG} \quad (4.56)$$

- ▷ $f < f_c$: $\gamma = \alpha$, $\beta = 0$

$$\alpha^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + \omega_c^2 \mu \epsilon \quad (4.57)$$

Cuando $f = 0$, entonces

$$\alpha = \sqrt{\omega_c^2 \mu \epsilon} = \sqrt{-\gamma_c^2}$$

Conforme sube la frecuencia, α disminuye, hasta que llega la frecuencia de corte, momento en el cual $\alpha = 0$. El lugar geométrico que describe α será

$$\frac{\alpha^2}{\omega_c^2 \mu \epsilon} + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = 1 \quad (4.58)$$

Es fácil comprobar que se trata de una elipse.

De nuevo tenemos una constante de atenuación que va a variar con la frecuencia, por lo que hay dispersión en la atenuación:

$$\alpha = \sqrt{\omega_c^2 \mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} = \sqrt{-\gamma_c^2} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad (4.59)$$

Se observa que ahora no tenemos el factor de guiado, ya que es un factor multiplicador distinto.

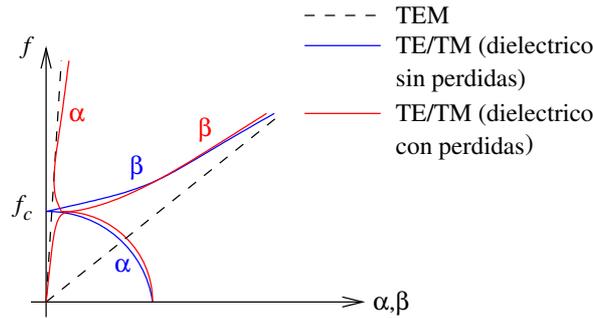


Figura 4.2: Diagramas de dispersión para modos TE/TM en caso de dieléctrico sin pérdidas (curva azul) y dieléctrico con pérdidas (curva roja), comparados con el modo TEM (curva rallada)

En resumen, podemos ver el diagrama de dispersión para un modo TE o TM en la figura (4.2). Esto es lo que ocurre para un solo modo, para la estructura entera habría que representar todos los modos, para cada γ_c .

Podemos, con el diagrama de dispersión de una estructura, saber qué modos se propagan a una frecuencia dada, como podemos ver en la figura (4.3), cortando las curvas de β a la frecuencia que estemos considerando. Aquellas que sean cortadas serán las que correspondan a los modos que se propagan. En la figura se cortan las dos primeras curvas, por lo que se propagarán dos modos.

Por contra, no se propagarán aquellos modos cuya curva de α sea cortada por la recta a la frecuencia de trabajo.

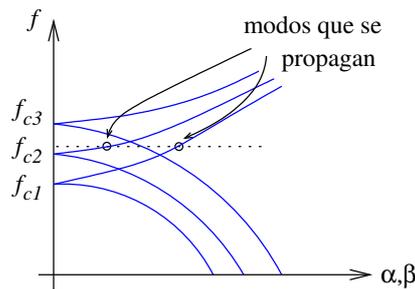


Figura 4.3: Diagramas de dispersión de diferentes modos y corte a una frecuencia para ver qué modos se propagan

4.2.4.4 Algunas consideraciones

- ⊃ A una frecuencia dada, siempre tendremos:
 - Finitos modos propagándose
 - Infinitos modos al corte
- ⊃ El primer modo en propagarse tras el TEM (en caso de que exista) será siempre un TE
- ⊃ La velocidad de fase de los modos TE o TM es mayor que c . No tiene sentido físico
- ⊃ La velocidad de grupo es menor que c
- ⊃ No hay flujo neto de energía escapando por la superficie lateral:

$$\frac{1}{2} \Re \left\{ \iint_{s_{\text{uplat}}} \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} \right\} = 0$$

Siendo \vec{E} perpendicular a la superficie lateral y $d\vec{S}$ también, esa integral es nula porque lo es el integrando.

⊃ Por contra, sí existe potencia transmitida por la superficie transversal del cilindro:

$$W_T = \frac{1}{2} \Re \left\{ \iint_{S_t} \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} \right\}$$

\vec{E} es perpendicular a la superficie lateral, mientras que $d\vec{S} = \hat{z} \cdot dS$, por lo que el producto no es nulo a menos que lo sea el campo.

4.2.4.5 Potencia transmitida por la superficie transversal

Como hemos visto antes

$$W_T = \frac{1}{2} \Re \left\{ \iint_{S_t} \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} \right\}$$

Escribimos el producto vectorial

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \vec{H}^* &= (\vec{E}_t + \vec{E}_z) \times (\vec{H}_t^* + \vec{H}_z^*) \\ &= \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* + \vec{E}_t \times \vec{H}_z^* + \vec{E}_z \times \vec{H}_t^* + \vec{E}_z \times \vec{H}_z^* \end{aligned}$$

Donde:

- ⊃ $\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*$ es longitudinal
- ⊃ $\vec{E}_t \times \vec{H}_z^*$ es transversal, y por tanto perpendicular a \hat{z}
- ⊃ $\vec{E}_z \times \vec{H}_t^*$ también es transversal
- ⊃ $\vec{E}_z \times \vec{H}_z^* = 0$ ya que uno de los dos es nulo

Por tanto la potencia transmitida se escribe finalmente como

$$W_T = \frac{1}{2} \Re \left\{ \iint_{S_t} (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot d\vec{S} \right\}$$

Como podemos escribir cada uno de los campos en función del otro:

$$\vec{H}_t = \frac{\hat{z} \times \vec{E}_t}{Z_{modo}} \quad \vec{E}_t = Z_{modo} (\vec{H}_t \times \hat{z})$$

Entonces el producto vectorial se puede escribir de otra forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* &= \hat{z} \cdot \frac{\vec{E}_t \cdot \vec{E}_t^*}{Z_{modo}^*} \\ &= \hat{z} \cdot Z_{modo} (\vec{H}_t \cdot \vec{H}_t^*) \end{aligned}$$

Usando la identidad vectorial

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

Por tanto, la potencia transmitida por la superficie transversal es, finalmente,

$$W_T = \begin{cases} \frac{1}{2} \iint_{S_t} \vec{E}_t \cdot \vec{E}_t^* dS \cdot \Re \left\{ \frac{1}{Z_{modo}^*} \right\} \\ \frac{1}{2} \iint_{S_t} \vec{H}_t \cdot \vec{H}_t^* dS \cdot \Re \{ Z_{modo} \} \end{cases} \quad (4.60)$$

Será $W_T > 0$, es decir, que la potencia se transmite en la misma dirección en que se propaga el modo. Por otro lado, la potencia depende además de la impedancia del modo, es decir:

▷ Para un modo TEM,

$$Z_{TEM} = \eta \in \mathbb{R}$$

Es decir, que se transmite potencia a cualquier frecuencia

▷ Para un modo TM,

$$Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \begin{cases} f < f_c \rightarrow Z_{TM} = \frac{\alpha}{j\omega\epsilon} \\ f > f_c \rightarrow Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} \end{cases}$$

Por lo que no se puede transmitir potencia a todas las frecuencias, al ser la impedancia imaginaria pura en las frecuencias inferiores a la de corte

▷ Para un TE,

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \begin{cases} f < f_c \rightarrow Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\alpha} \\ f > f_c \rightarrow Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta} \end{cases}$$

Tenemos lo mismo que en el TM, para frecuencias inferiores a la de corte la impedancia es imaginaria pura y por tanto no hay transmisión de potencia

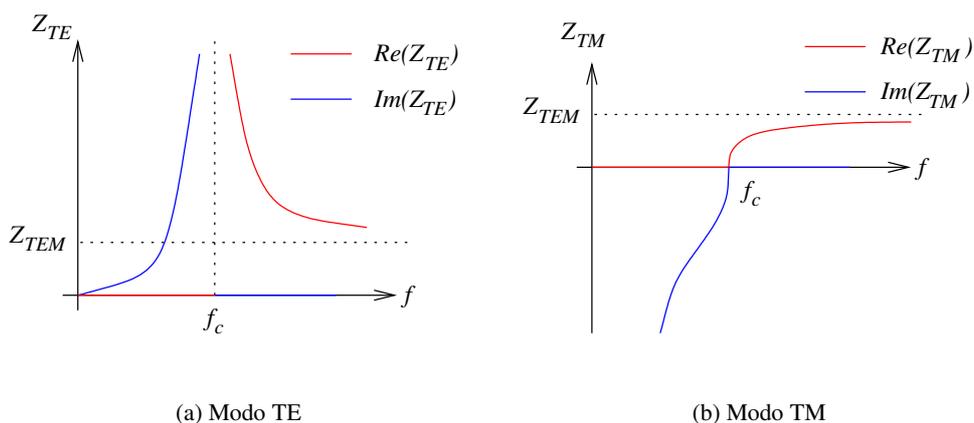


Figura 4.4: Impedancia de los modos TE y TM para un dieléctrico sin pérdidas

En la figura (4.4) encontramos la representación gráfica para las impedancias de los modos TE y TM en el caso de que la guía tenga un dieléctrico sin pérdidas. Vemos que cuando se sube en frecuencia la impedancia del modo acaba tendiendo a la del modo TEM, η .

Se cumplen además las siguientes expresiones:

$$Z_{TE} = \frac{\pm\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad (4.61)$$

$$Z_{TM} = \pm\eta\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (4.62)$$

Donde en ambos casos se toma el signo positivo si $f > f_c$ y el negativo si $f < f_c$.

4.2.5 Efectos de las pérdidas en el dieléctrico

En el caso de que

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

La constante de propagación es, en general, compleja

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

para todas las frecuencias.

Lo que sucede ahora es que en unos márgenes de frecuencias predominará la componente real (α) y en otros lo hará la imaginaria (β), pero no habrá transición abrupta.

Sin embargo, γ_c^2 sigue siendo real, ya que no hay pérdidas en los conductores. Expresamos la constante de propagación:

$$\begin{aligned} (\alpha + j\beta)^2 &= -\omega^2\mu(\varepsilon' - j\varepsilon'') - \gamma_c^2 \\ \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta &= -\omega^2\mu\varepsilon' + j\omega^2\mu\varepsilon'' - \gamma_c^2 \end{aligned}$$

Igualando partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= -\omega^2\mu\varepsilon' - \gamma_c^2 \\ 2\alpha\beta &= \omega^2\mu\varepsilon'' \end{aligned}$$

Ahora la **frecuencia de corte** será aquella a la que se igualen α y β :

$$\alpha = \beta \Rightarrow -\omega_c^2\mu\varepsilon' - \gamma_c^2 = 0$$

Por tanto la frecuencia de corte queda

$$\omega_c = \frac{\sqrt{-\gamma_c^2}}{\sqrt{\mu\varepsilon'}} \quad (4.63)$$

El diagrama de dispersión se modifica como veíamos en la figura (4.2).

En términos de potencia, lo que tenemos es que a frecuencias inferiores a la de corte hay transmisión de energía, pero con muchas pérdidas, debido a la α . Tenemos:

$$e^{-\gamma z} \cdot e^{\gamma^* z} = e^{-2\alpha z}$$

Entonces, la potencia transmitida a lo largo de una sección delimitada por los planos z_1 y z_2 es

$$W_T(z_2) = W_T(z_1) e^{-2\alpha(z_2 - z_1)} \quad (4.64)$$

Encontramos que la potencia disipada no es uniforme a lo largo del cilindro, ya que depende de la potencia que llegue a cada sección.

Si consideramos un tramo de guía de longitud infinitesimal, Δz , la potencia disipada en el tramo de z a $z + \Delta z$ es

$$P_{dis}(z) = W_T(z) - W_T(z + \Delta z) \quad (4.65)$$

Podemos calcular la potencia perdida en el dieléctrico por unidad de longitud como

$$W_{pd}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{W_T(z) - W_T(z + \Delta z)}{\Delta z} \quad (4.66)$$

Es decir,

$$\boxed{W_{pd}(z) = -\frac{dW_T(z)}{dz} = 2\alpha W_T(z) \quad W/m} \quad (4.67)$$

Así, la potencia disipada en un punto del dieléctrico es proporcional a la potencia que llega a dicho punto.

Conociendo la potencia disipada en el dieléctrico por unidad de longitud obtenemos la **constante de atenuación del dieléctrico**,

$$\boxed{\alpha_d = \frac{W_{pd}(z)}{2W_T(z)}} \quad (4.68)$$

Esto es lo que nos da información sobre la disipación de energía en la guía. Esta crece exponencialmente conforme se avanza en la guía.

Ejemplo 4.1:

Tenemos en una guía de longitud $l = 1m$

$$W_{pd} = 5W/m$$

La potencia disipada en toda la guía, en general, no son $5W$. Habrá que usar la expresión

$$P_{dis}(l) = W_T(z_1) - W_T(z_2) = W_T(z_1) \left(1 - e^{-2\alpha l}\right)$$

Suponiendo que sólo incide un modo en la guía.

Si $\alpha l \ll 1$ entonces se puede aproximar $e^{-2\alpha l} \simeq 1 - 2\alpha l$, con lo que

$$P_{dis}(l) \simeq W_T(z_1) 2\alpha l = W_{pd}(z) l$$

Cuando las pérdidas son muy pequeñas, entonces sí se puede aproximar por $W_{pd}(z) l$, por lo que en nuestro caso sí serán $5W$. ■

4.3 La guía rectangular

4.3.1 Introducción

Tenemos una guía con sección transversal rectangular, como vemos en la figura (4.5).

La cara ancha, a , la pondremos en dirección x . En la práctica tendremos paredes de conductor real con cierto grosor, como sería por ejemplo la de la figura (4.6).

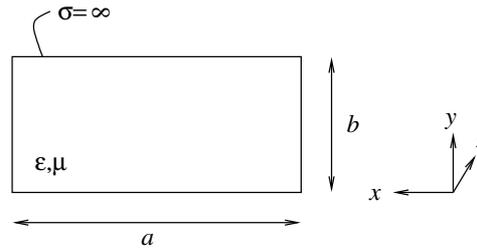


Figura 4.5: Guía rectangular

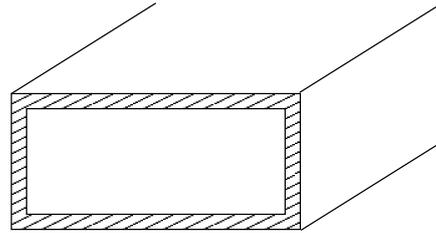


Figura 4.6: Guía rectangular en caso práctico

Normalmente estará vacía, ya que no es necesario un soporte como en el cable coaxial.

En primer lugar, resolveremos el caso de conductor perfecto, y aplicaremos el enfoque perturbacional para introducir las pérdidas en el conductor.

Para los modos TE y TM tenemos la misma ecuación a resolver:

$$\Delta_t F - \gamma_c^2 F = 0$$

Que en nuestro caso es

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \gamma_c^2 F = 0$$

Cambiando únicamente las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \text{TM} &\rightarrow F_E|_C = 0 \\ \text{TE} &\rightarrow \frac{\partial F_H}{\partial n} \Big|_C = 0 \end{aligned}$$

Para el modo TM en nuestro caso particular:

$$F_E|_{x=0} = 0 \quad F_E|_{x=a} = 0 \quad F_E|_{y=0} = 0 \quad F_E|_{y=b} = 0$$

Mientras que para el TE:

$$\frac{\partial F_H}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial F_H}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \quad \frac{\partial F_H}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad \frac{\partial F_H}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0$$

Donde cada uno de los vectores que hay que considerar son los que vemos en la figura (4.7).

Podemos usar el método de separación de variables:

$$F(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$



Figura 4.7: Condiciones de contorno en el modo TE de la guía rectangular

La ecuación para los modos queda

$$YX'' + XY'' - \gamma_c^2 XY = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \gamma_c^2$$

Como γ_c^2 es constante, tanto $\frac{X''}{X}$ como $\frac{Y''}{Y}$ lo son:

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \quad (4.69)$$

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \quad (4.70)$$

Las dos ecuaciones son iguales, salvo la condición de contorno. Encontramos varios tipos de soluciones

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2 X(x) \quad (4.71)$$

⊃ $k_x^2 = 0$: En este caso tenemos la **solución lineal**:

$$X(x) = Ax + b \quad (4.72)$$

⊃ $k_x^2 \neq 0$: $r^2 = -k_x^2 \rightarrow r = \sqrt{-k_x^2}$

$$X(x) = k_1 e^{\sqrt{-k_x^2}x} + k_2 e^{-\sqrt{-k_x^2}x}$$

Tenemos dos posibilidades:

⇒ $k_x^2 > 0$: **Solución trigonométrica**

$$X(x) = A \cos k_x x + B \sin k_x x \quad (4.73)$$

⇒ $k_x^2 < 0$: **Solución hiperbólica**

$$X(x) = A \cosh k_x x + B \sinh k_x x \quad (4.74)$$

Por tanto, tendremos las tres posibilidades para $X(x)$ y para $Y(y)$, así que en principio habrá 9 combinaciones posibles.

Podemos empezar a descartar, teniendo en cuenta que $-\gamma_c^2$ tiene que ser real positivo, no puede haber dos soluciones en las que las dos k sean negativas ni una negativa y la otra nula.

Al imponer las condiciones de contorno para los modos TM,

$$F_E|_C = 0$$

el contorno serán los puntos $x = 0, x = a, y = 0, y = b$. Al imponerse dos nulos en X o Y se descartan las soluciones hiperbólicas. En cuanto a las soluciones lineales $X(x) = Ax + B$, el anularse en 2 puntos requiere $A = B = 0$, por lo que para los modos TM sólo verifica las condiciones de contorno la solución trigonométrica-trigonométrica.

En cuanto a los modos TE,

$$\left. \frac{\partial F_H}{\partial n} \right|_C = 0$$

La derivada de una función hiperbólica es hiperbólica, por lo que tampoco nos sirve la solución hiperbólica, ya que no se puede anular en 2 puntos. Para la lineal, en cambio:

$$X' = A$$

Y para anularla sólo hay que hacer $A = 0$. También sirve la solución trigonométrica.

Por ello, para los modos TE y TM sólo podrían darse los siguientes casos:

- ⤵ $k_x^2 > 0$ y $k_y^2 > 0$ en ambos modos. Sería la solución trigonométrica-trigonométrica (T-T)
- ⤵ $k_x^2 > 0$ y $k_y^2 = 0$ en el modo TE (no en el TM). Sería la solución trigonométrica-lineal (T-L). De la misma forma la complementaria: $k_x^2 = 0$ y $k_y^2 > 0$

Las condiciones de contorno que se obtienen son las siguientes:

⤵ Modos TM

$$X(x)Y(y)|_{x=0} = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$X(x)Y(y)|_{x=a} = 0 \Rightarrow X(a) = 0$$

$$X(x)Y(y)|_{y=0} = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$

$$X(x)Y(y)|_{y=b} = 0 \Rightarrow Y(b) = 0$$

⤵ Modos TE

$$X'(x)Y(y)|_{x=0} = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$$

$$X'(x)Y(y)|_{x=a} = 0 \Rightarrow X'(a) = 0$$

$$X(x)Y'(y)|_{y=0} = 0 \Rightarrow Y'(0) = 0$$

$$X(x)Y'(y)|_{y=b} = 0 \Rightarrow Y'(b) = 0$$

Ahora vamos a obtener las soluciones para cada uno de los modos

4.3.2 Modos TM

Recordemos que en estos modos sólo es posible la solución trigonométrica tanto para X como para Y . Por tanto, la solución tendrá la forma

$$\begin{aligned} F_E(x, y) &= X(x) \cdot Y(y) \\ &= (A \cos k_x x + B \operatorname{sen} k_x x) \cdot (C \cos k_y y + D \operatorname{sen} k_y y) \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones de contorno:

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X(a) = 0 \Rightarrow B \operatorname{sen} k_x a = 0$$

Por tanto la constante k_x es

$$\boxed{k_x = \frac{m\pi}{a}} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.75)$$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$Y(b) = 0 \Rightarrow D \operatorname{sen} k_y b = 0$$

Así que la otra constante es

$$\boxed{k_y = \frac{n\pi}{b}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.76)$$

Con lo que, finalmente, la **función generadora de los modos TM** es

$$\boxed{F_E(x, y) = Q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y} \quad (4.77)$$

El valor de Q_{mn} será desconocido hasta que se impongan las condiciones de contorno en las tapas de la guía. Los subíndices m y n indican modos TM_{mn} .

La componente longitudinal del campo eléctrico es

$$\boxed{E_z(x, y, z) = Q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma_{mn} z}} \quad (4.78)$$

Siendo

$$\boxed{\gamma_{mn} = \sqrt{\gamma_0^2 - \gamma_{c_{mn}}^2} = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \quad (4.79)$$

$$-\gamma_{c_{mn}}^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (4.80)$$

En (4.79) la dependencia con la geometría es clara, por los parámetros a y b .

De esta misma ecuación obtenemos la **frecuencia de corte** del modo, sin más que hacer $\gamma_{mn} = 0$:

$$\boxed{f_{c_{TM_{mn}}} = \frac{\sqrt{-\gamma_{c_{mn}}^2}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}} \quad (4.81)$$

El campo eléctrico transversal tiene la siguiente expresión:

$$\vec{E}_t = \frac{\gamma}{\gamma_c^2} \nabla_t E_z = \frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{c_{mn}}^2} \left(\hat{x} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

Así pues, en nuestro caso:

$$\boxed{\vec{E}_{t_{mn}} = \frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{c_{mn}}^2} \left(\hat{x} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y + \hat{y} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \right) Q_{mn} e^{-\gamma_{mn} z}} \quad (4.82)$$

El campo magnético transversal es

$$\vec{H}_{t_{mn}} = \frac{\hat{z} \times \vec{E}_{t_{mn}}}{Z_{TM}}$$

donde

$$Z_{TM} = \frac{\gamma_{mn}}{j\omega\varepsilon}$$

Para la guía rectangular

$$\boxed{\vec{H}_{t_{mn}} = \frac{j\omega\varepsilon}{\gamma_{c_{mn}}^2} \left(\hat{y} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y - \hat{x} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \right) Q_{mn} e^{-\gamma_{mn} z}} \quad (4.83)$$

4.3.3 Modos TE

Esto mismo que hemos hecho habrá que repetirlo para los modos TE. Las soluciones que se obtienen son:

- ▷ Trigonométrica-trigonométrica
- ▷ Lineal-trigonométrica
- ▷ Trigonométrica-lineal

Las condiciones de contorno son

$$X'(0) = 0$$

$$X'(a) = 0$$

$$Y'(0) = 0$$

$$Y'(b) = 0$$

4.3.3.1 Solución trigonométrica-trigonométrica

Imponiendo las condiciones de contorno a $X(x)$:

$$X'(x) = -Ak_x \operatorname{sen} k_x x + Bk_x \operatorname{cos} k_x x$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X'(a) = 0 \Rightarrow Ak_x \operatorname{sen} k_x a = 0$$

Nos queda para la constante k_x :

$$\boxed{k_x = \frac{m\pi}{a}} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.84)$$

Para $Y(y)$:

$$Y'(y) = -Ck_y \operatorname{sen} k_y y + Dk_y \operatorname{cos} k_y y$$

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$Y'(b) = 0 \Rightarrow -Ck_y \operatorname{sen} k_y b = 0$$

Así que k_y es

$$\boxed{k_y = \frac{n\pi}{b}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De esto se obtiene la **función generadora de los modos TE** para la solución trigonométrica-trigonométrica:

$$\boxed{F_H(x, y) = P_{mn} \operatorname{cos} \frac{m\pi}{a} x \cdot \operatorname{cos} \frac{n\pi}{b} y} \quad (4.85)$$

4.3.3.2 Solución lineal-trigonométrica

Ahora $X(x)$ es lineal, por lo que

$$X'(x) = A$$

y las condiciones de contorno imponen

$$X'(0) = X'(a) = 0 \Rightarrow A = 0$$

La solución lineal será

$$X(x) = B$$

Por otro lado, la solución trigonométrica debe cumplir

$$Y'(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$Y'(b) = 0 \Rightarrow -Ck_y \operatorname{sen} k_y y = 0$$

De donde se obtiene

$$\boxed{k_y = \frac{n\pi}{b}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.86)$$

La **función generadora de los modos TE** para esta solución lineal trigonométrica es

$$\boxed{F_H(x, y) = P_{mn} \cos \frac{n\pi}{b} y} \quad (4.87)$$

Donde hemos incluido B en P_{mn} .

4.3.3.3 Solución trigonométrica-lineal

El proceso es idéntico al caso anterior, cambiando sólo que ahora $X(x)$ es la solución trigonométrica y $Y(y)$ la lineal.

La **función generadora de los modos TE** es esta vez:

$$\boxed{F_H(x, y) = P_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x} \quad (4.88)$$

4.3.3.4 Solución general

Podemos poner la solución de la función generadora en forma más compacta usando la que hemos obtenido para la solución trigonométrica-trigonométrica permitiendo $m = 0$ o $n = 0$

$$\boxed{F_H(x, y) = P_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y} \quad m = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots; m + n \neq 0 \quad (4.89)$$

Los autovalores son los mismos que los del modo TM

$$-\gamma_{c_{mn}}^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (4.90)$$

Y el campo magnético longitudinal

$$\boxed{H_z(x, y, z) = P_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma_{mn} z}} \quad (4.91)$$

Donde la constante de propagación es

$$\gamma_{mn} = \sqrt{\gamma_0^2 - \gamma_{c_{mn}}^2} = \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (4.92)$$

Y el valor de P_{mn} se determinará al imponer las condiciones de contorno en las tapas de la guía.

La **frecuencia de corte** es

$$f_{c_{TE_{mn}}} = \frac{\sqrt{-\gamma_{c_{mn}}^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (4.93)$$

Es la misma que la de los modos TM. Tienen la misma frecuencia de corte para los mismos valores de m y n pero distinta estructura de campo. Por eso se dice que son **modos degenerados**.

Todos los modos TM en la guía rectangular tienen un modo degenerado, pero no al revés, ya que existe modo TE_{10} pero no TM_{10} .

La componente transversal del campo magnético es

$$\vec{H}_{t_{mn}} = \frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{c_{mn}}^2} \nabla_t H_{z_{mn}}$$

Y la del campo eléctrico

$$\vec{E}_{t_{mn}} = Z_{TE_{mn}} (\vec{H}_{t_{mn}} \times \hat{z})$$

Siendo

$$Z_{TE_{mn}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma_{mn}}$$

El campo total será la suma de todos los modos TE y TM.

4.3.4 Modos dominante y superiores

Podemos determinar el modo dominante en la guía rectangular y los modos superiores, de forma que podamos saber el ancho de banda monomodo de la guía. Esto lo hacemos viendo el valor de $\sqrt{-\gamma_{c_{mn}}^2}$ para distintos valores de m y n , en la tabla (4.1).

$m \setminus n$	0	1	2
0	NO	NO $TM/\frac{\pi}{b}$	NO $TM/\frac{2\pi}{b}$
1	NO $TM/\frac{\pi}{a}$	$\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2}$
2	NO $TM/\frac{2\pi}{a}$	$\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2}$

Tabla 4.1: Valores de $\sqrt{-\gamma_c^2}$ para ambos modos y valores de m y n entre 0 y 2

El **modo dominante** es aquel que tiene la frecuencia de corte más baja. Este es el TE_{10} :

$$\sqrt{-\gamma_{c_{10}}^2} = \frac{\pi}{a}$$

Ya que $a > b$ y por tanto su frecuencia de corte es menor que la del TE_{01} . La frecuencia de corte es

$$f_{c_{TE_{10}}} = \frac{c/\sqrt{\epsilon_r}}{2a} \quad (4.94)$$

Por tanto, dos guías rectangulares con el mismo valor de a (mismo ancho) tienen la misma frecuencia de corte, aunque su altura b sea diferente.

El siguiente modo superior dependerá del valor de b :

⇒ $a = 2b$: entonces los modos TE_{20} y TE_{01} tienen la misma frecuencia de corte:

$$\boxed{f_{c_{TE_{20}}} = f_{c_{TE_{01}}} = \frac{c/\sqrt{\epsilon_r}}{a}} = 2f_{c_{TE_{10}}} \quad (4.95)$$

Podemos ver en la figura (4.8) los anchos de banda monomodo para los diferentes casos.

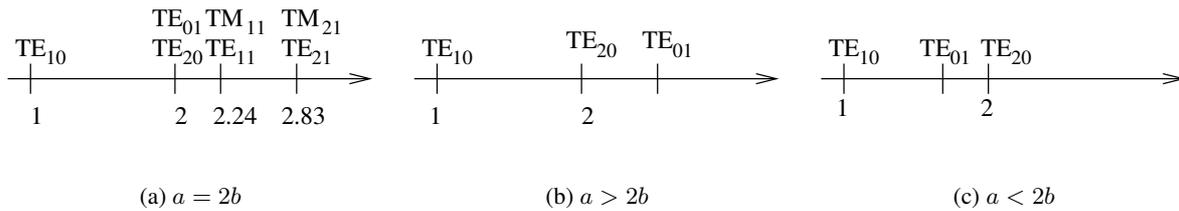


Figura 4.8: Ancho de banda monomodo de la guía rectangular para a) $a = 2b$, b) $a > 2b$ y c) $a < 2b$

⇒ $a > 2b$: en este caso el TE_{20} se propaga a frecuencia menor que el TE_{01} , pero sigue siendo el doble de frecuencia que para el TE_{10}

⇒ $a < 2b$: ahora el TE_{01} es el primer modo superior, que se propaga a frecuencia inferior al doble de la del modo dominante, por lo que se reduce el ancho de banda monomodo de la estructura

En el caso $a = 2b$ estudiamos con un poco más de detalle el TE_{10} , ya que es el que se usa para propagar energía en la guía rectangular.

La función generadora es

$$F_{H_{mn}} = P_{mn} \cos \frac{m\pi}{a}x \cdot \cos \frac{n\pi}{b}y$$

Para el caso particular del modo TE_{10}

$$F_{H_{10}} = P \cos \frac{\pi}{a}x \quad (4.96)$$

El autovalor será

$$-\gamma_{c_{10}}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad (4.97)$$

Por lo que la constante de propagación resulta

$$\gamma_{TE_{10}} = \sqrt{-\omega^2\mu\epsilon + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (4.98)$$

Es decir, que la componente longitudinal del campo magnético es

$$H_z(x, y, z) = P \cos \frac{\pi}{a}x \cdot e^{-\gamma_{TE_{10}}z} \quad (4.99)$$

Y por tanto la componente tangencial

$$\vec{H}_t = \frac{\gamma_{TE_{10}}}{\gamma_{c_{10}}^2} \nabla_t H_z = \frac{\gamma_{TE_{10}}}{\pi/a} \hat{x} P \sin \frac{\pi}{a}x \cdot e^{-\gamma z}$$

Mientras que el campo eléctrico tangencial es

$$\vec{E}_t = Z_{TE} \left(\vec{H}_t \times \hat{z} \right) = -\hat{y} \frac{j\omega\mu}{\pi/a} P \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-\gamma z}$$

Así, descomponiendo los campos:

$$\begin{aligned} H_z &= P \cos \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-\gamma z} \\ H_x &= \frac{\gamma}{\pi/a} P \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-\gamma z} \\ H_y &= 0 \\ E_z &= 0 \\ E_x &= 0 \\ E_y &= -\frac{j\omega\mu}{\pi/a} P \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-\gamma z} \end{aligned}$$

Vemos que se trata de un campo eléctrico linealmente polarizado en dirección y . En la figura (4.9) está la representación del módulo de E_y para una sección transversal de la guía. Esta estructura se repite cada longitud de onda y la encontramos invertida cada media longitud de onda.

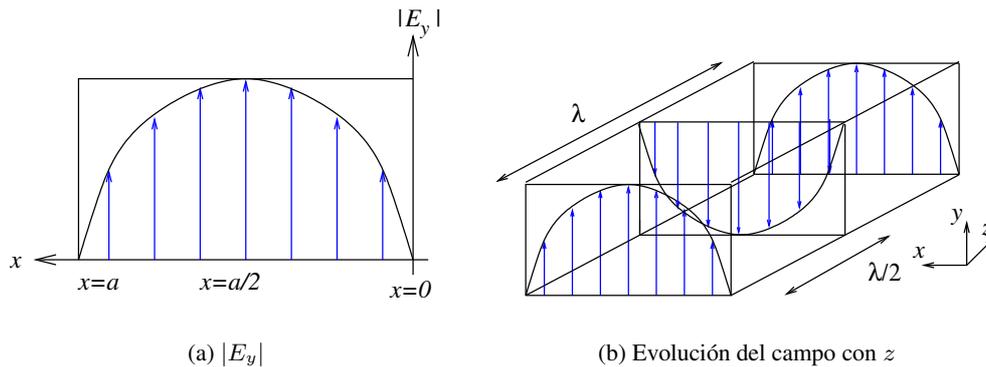


Figura 4.9: Estructura de campo del modo TE_{10} de la guía rectangular

La pregunta es para qué nos interesa conocer la estructura de campo. Las respuestas:

- ⤷ Diseñar sistemas. Por ejemplo, si queremos hacer un atenuador que elimine algún modo en la guía, eso se hace colocando un elemento resistivo en el interior de la guía, de forma que se perturbe la estructura de campo del modo. Si quisiéramos atenuar el modo TE_{10} , colocaríamos un elemento metálico en el centro de la guía
- ⤷ Medir el diagrama de onda estacionaria: hay que insertar la sonda de forma que no se perturbe el campo. Para el TE_{10} , se haría una ranura en el centro de la guía
- ⤷ Antenas ranuradas
- ⤷ Para trabajar con un modo superior, hay que anular los modos inferiores para que no se propaguen. Esto será de especial interés en la guía circular

En la figura (4.10) vemos dos ejemplos: el atenuador y la antena ranurada. Cuando se hagan ranuras en una guía hay que tener en cuenta que no se deben cortar líneas de corriente.

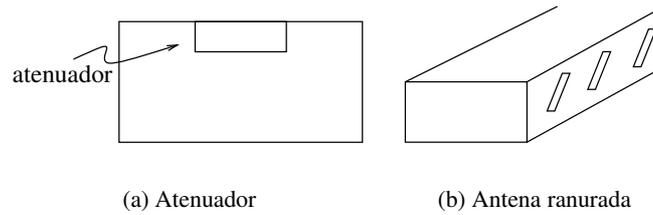


Figura 4.10: Aplicaciones de guías rectangulares: a) atenuador y b) antena ranurada

4.3.5 Ejemplo de guía comercial estandarizada

La guía WR-90 (WR por guía rectangular y 90 por las dimensiones: $a = 0.9$ pulgadas) se usa en banda X, de 8.2 a 12.4GHz.

$$a = 22.86mm \quad b = 10.16mm$$

Se cumple $a > 2b$, por lo que el primer modo superior es el TE_{20} .

Veamos dos casos:

- El primero es el de rellenar la guía con aire, dieléctrico sin pérdidas. La frecuencia de corte del modo dominante es

$$f_{cTE_{10}} = \frac{c/\sqrt{\epsilon_r}}{2a} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 22.83 \cdot 10^{-3}} = 6.56GHz$$

Mientras que la del primer modo superior

$$f_{cTE_{20}} = 2f_{cTE_{10}} = 13.12GHz$$

- Ahora si consideramos un dieléctrico con pérdidas: $\epsilon = \epsilon_0 (1.03 - j0.051)$. Ahora la frecuencia de corte del modo dominante es algo menor

$$f_{cTE_{10}} = \frac{c/\sqrt{\epsilon_r}}{2a} = \frac{6.56GHz}{\sqrt{1.03}} = 6.46GHz$$

Y la del primer modo superior

$$f_{cTE_{20}} = 12.93GHz$$

El **ancho de banda útil** de la guía es algo menor, ya que no se trabaja demasiado cerca de los límites del ancho de banda monomodo. Esto es porque cuanto más se baje en frecuencia se está más cerca del corte y la constante de fase es menos lineal (dispersión), y si se sube en frecuencia acercándose demasiado a la frecuencia de corte del modo superior entonces hay menor atenuación para ese modo superior.

4.3.6 Potencia transmitida por el modo fundamental

La potencia transmitida por un campo es

$$W_T = \frac{1}{2} \Re e \iint_{S_t} \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{z} dS = \frac{1}{2} \Re e \iint_{S_t} \frac{\vec{E}_t \cdot \vec{E}_t^*}{Z_{modo}^*} dS \quad (4.100)$$

Para el modo TE_{10} tenemos

$$\vec{E}_t = -\hat{y} \frac{j\omega\mu}{\pi/a} P \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{a} x \right) \cdot e^{-\gamma z} \quad (4.101)$$

Si se trabaja por encima del corte (que es cuando hay potencia transmitida) la impedancia característica del modo es

$$\begin{aligned}
 Z_{TE_{10}} &= \frac{j\omega\mu}{\gamma_{TE_{10}}} = \frac{\omega\mu}{\beta_{TE_{10}}} \\
 &= \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2}} \\
 Z_{TE_{10}} &= \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2}} \quad (4.102)
 \end{aligned}$$

Así que la potencia transmitida es

$$W_{T_{TE_{10}}} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \left(\frac{\omega\mu}{\pi/a}\right)^2 |P|^2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2}}{\eta} dy dx$$

Usando que

$$\int_0^a \text{sen}^2 \frac{\pi}{a}x = \frac{a}{2} \quad y \quad E_0 = -\frac{j\omega\mu}{\pi/a}P$$

Se obtiene finalmente

$$\boxed{W_{T_{TE_{10}}} = \frac{ab}{4\eta} |E_0|^2 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2}} \quad (4.103)$$

La potencia transmitida en $f = f_{c10}$ es nula, mientras que se incrementa conforme se sube en frecuencia. La cota máxima es

$$W_{T_{max}} = \frac{ab}{4\eta} |E_0|^2$$

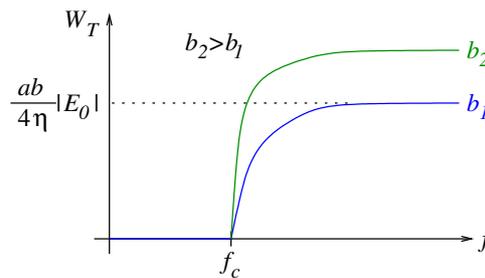


Figura 4.11: Potencia transmitida por la guía rectangular en función de la frecuencia para dieléctrico sin pérdidas y dos valores de b

En la figura (4.11) vemos la evolución con la frecuencia de la potencia transmitida en la guía rectangular, considerándola rellena de un dieléctrico sin pérdidas. Se dan dos valores del alto de la sección transversal, b_1 y b_2 siendo $b_2 > b_1$. Esto nos dice que cuanto mayor sea b , más potencia se puede transmitir por la guía para un mismo campo en el generador.

Al ser el dieléctrico sin pérdidas, la potencia es constante a lo largo de toda la guía.

Para diseñar la guía:

- Primero se diseña la frecuencia de corte, obteniéndose el valor de a necesario
- Luego para una potencia a transmitir dada se sube el valor de b todo lo que se pueda hasta $a/2$, si queremos el máximo ancho de banda monomodo

Por tanto, es necesario llegar a un **compromiso** cuando se diseña una guía entre ancho de banda monomodo y potencia a transmitir. El valor óptimo es $b = a/2$. Óptimo porque permite la máxima transferencia de potencia por la guía manteniendo el máximo ancho de banda monomodo. Si se quisiera más potencia habría que disminuir el ancho de banda monomodo.

También podemos ver el valor de campo para una potencia a transmitir dada:

$$|E_0|^2 = \frac{4\eta}{ab} \frac{W_{T_{TE10}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2}}$$

Representado en la figura (4.12).

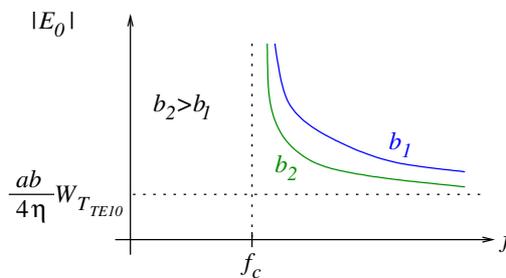


Figura 4.12: Módulo del campo eléctrico para una potencia a transmitir dada en la guía rectangular

El valor mínimo de campo es

$$|E_0|_{min}^2 = \frac{4\eta}{ab} W_T$$

Podemos hacer un ejemplo numérico con la guía que vimos antes, la WR-90. Si la guía está vacía, el campo de ruptura del dieléctrico es

$$E_{ruptura} = 3 \cdot 10^6 V/m$$

Por lo que la potencia máxima que se puede transmitir será

$$W_{T_{max}} = \frac{ab}{4\eta} |E_{ruptura}|^2 = 1.5 MW$$

Esta potencia se podría transmitir por la guía si realmente fuera un dieléctrico sin pérdidas y el conductor perfecto. En la realidad esto no es así, por lo que el conductor tendrá pérdidas y con esas potencias se puede fundir.

Si el conductor fuera cobre la potencia máxima posible real sería

$$W_{T_{max}} \simeq 4.5 kW$$

para el mismo tipo de guía.

4.4 Atenuación debida a los conductores

4.4.1 Caso general

Si ahora tenemos en cuenta la atenuación debida a los conductores, encontramos que no existen modos TE y TM puros, sino que se trata de **modos híbridos**, en los que en ningún caso se anulan E_z ni H_z . Además, γ_c^2 es compleja, lo que hace el problema muy complicado.

Sin embargo, a pesar de la complejidad del nuevo problema, lo que nos interesa son las magnitudes que antes eran nulas para poder calcular la atenuación que introducen los conductores. Esto es, queremos encontrar las componentes que antes no aparecían y que vemos en las condiciones de contorno de la figura (4.13).

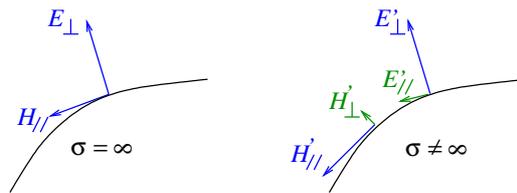


Figura 4.13: Condiciones de contorno del campo para conductor perfecto y real

Para el conductor perfecto encontrábamos que el campo eléctrico es normal a la superficie, mientras que el magnético es tangencial.

Cuando tenemos un conductor de σ finita, aparece una componente tangencial del campo eléctrico y una normal del campo magnético. Si la conductividad es elevada, entonces E'_{\parallel} será muy pequeño en comparación con E'_{\perp} . Igualmente para H'_{\parallel} y H'_{\perp} .

Además, encontramos que para una conductividad alta los campos que teníamos antes no sufren mucha variación:

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\perp} &\simeq \vec{E}_{\perp} \\ \vec{H}'_{\parallel} &\simeq \vec{H}_{\parallel}\end{aligned}$$

Si subimos en frecuencia muy por encima de la frecuencia de corte:

$$\beta' \simeq \beta_{\text{conductor perfecto}}$$

$$\alpha'_d \simeq \alpha_d$$

$$\alpha'_c \text{ (lo que nos interesa calcular)}$$

Sólo nos centraremos en obtener α'_c . Si recordamos el significado de las pérdidas en el dieléctrico:

$$\alpha_d = \frac{W_{pd}}{2W_T} \quad (4.104)$$

Podemos hacer la misma definición para las pérdidas debidas a los conductores:

$$\boxed{\alpha_c = \frac{W_{pc}}{2W_T}} \quad (4.105)$$

W_{pc} es la potencia que se escapa por las paredes de los conductores, y se obtiene con la expresión

$$\text{potencia perdida en los conductores} = \frac{1}{2} \Re e \iint_{S_{lateral}} (\vec{E}' \times \vec{H}'^*) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \Re e \iint_{S_{lateral}} (\vec{E}'_{\parallel} \times \vec{H}'_{\parallel}^*) \cdot \hat{n}_e dS$$

Para obtener la potencia perdida por unidad de longitud:

$$W_{pc} = \frac{1}{2} \Re \oint_{\text{contorno}} \left(\vec{E}'_{\parallel} \times \vec{H}'_{\parallel}{}^* \right) \cdot \hat{n}_e dl \simeq \frac{1}{2} \Re \oint_{\text{contorno}} \left(\vec{E}'_{\parallel} \times \vec{H}_{\parallel}{}^* \right) \cdot \hat{n}_e dl$$

Donde hemos considerado $\vec{H}'_{\parallel} \simeq \vec{H}_{\parallel}$

Necesitaremos los campos nuevos, pero usaremos los campos del caso ideal y el enfoque perturbacional.

En W_{pc} intervienen \vec{E}'_{\parallel} y \vec{H}'_{\parallel} , donde la primera la estimaremos a partir de la segunda con la **condición de Leontovich**:

⇒ Si se trabaja a frecuencia $f \gg f_c$, el espesor del conductor es mucho mayor que la profundidad de penetración y el radio de curvatura es mucho mayor que la profundidad de penetración, entonces se puede estimar \vec{E}'_{\parallel} como

$$\boxed{\vec{E}'_{\parallel} = Z_s \left(\hat{n}_s \times \vec{H}'_{\parallel} \right) \simeq Z_s \left(\hat{n}_s \times \vec{H}_{\parallel} \right)} \quad (4.106)$$

siendo

$$Z_s = \frac{1+j}{\sigma\delta} \quad y \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}}$$

y \hat{n}_s el vector normal saliente del conductor hacia el interior de la guía. El valor de \vec{H}_{\parallel} será el que se obtenga para el caso de conductor perfecto.

Con esto, la potencia perdida en los conductores por unidad de longitud nos queda

$$W_{pc} \simeq \frac{1}{2} \Re \oint_c \left(\frac{1+j}{\sigma\delta} \left(\hat{n}_s \times \vec{H}_{\parallel} \right) \times \vec{H}_{\parallel}{}^* \right) \cdot \hat{n}_e dl$$

Desarrollando el integrando

$$\begin{aligned} \left(\hat{n}_s \times \vec{H}_{\parallel} \right) \times \vec{H}_{\parallel}{}^* &= -\vec{H}_{\parallel}{}^* \times \left(\hat{n}_s \times \vec{H}_{\parallel} \right) \\ &= - \left(\hat{n}_s \left(\vec{H}_{\parallel}{}^* \cdot \vec{H}_{\parallel} \right) - \vec{H}_{\parallel} \overbrace{\left(\vec{H}_{\parallel}{}^* \cdot \hat{n}_s \right)}^0 \right) \\ &= -\hat{n}_s \vec{H}_{\parallel}{}^* \cdot \vec{H}_{\parallel} \\ &= \hat{n}_e \vec{H}_{\parallel}{}^* \cdot \vec{H}_{\parallel} \end{aligned}$$

Siendo ahora $\hat{n}_e = -\hat{n}_s$. Escribimos por tanto la potencia perdida en los conductores

$$W_{pc} \simeq \frac{1}{2} \Re \oint_c \left(\frac{1+j}{\sigma\delta} \hat{n}_e \vec{H}_{\parallel} \cdot \vec{H}_{\parallel}{}^* \right) \cdot \hat{n}_e dl = \frac{1}{2} \oint_c \frac{\vec{H}_{\parallel} \cdot \vec{H}_{\parallel}{}^*}{\sigma\delta} dl$$

Y, finalmente, dado que en conductor perfecto $\vec{H} = \vec{H}_{\parallel}$,

$$\boxed{W_{pc} = \frac{1}{2} \oint_c \frac{\vec{H} \cdot \vec{H}^*}{\sigma\delta} dl} \quad W/m \quad (4.107)$$

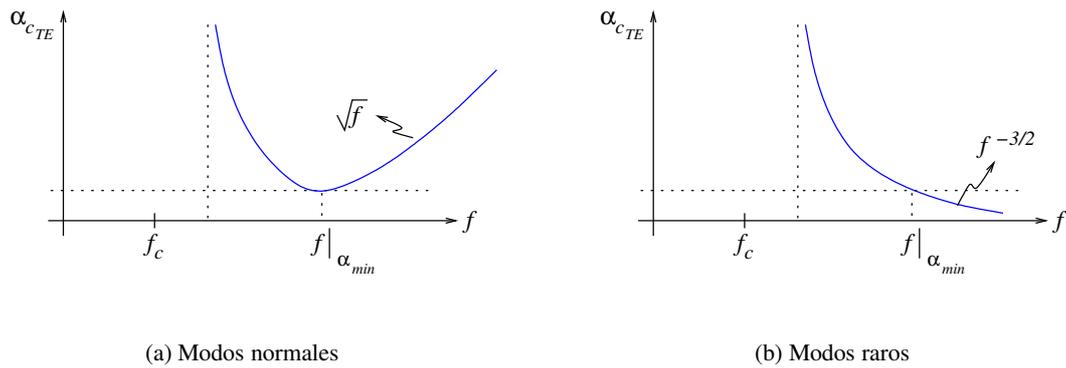


Figura 4.14: Evolución de la constante de atenuación debida a los conductores para los modos TE

Y la atenuación será, como hemos visto antes

$$\alpha_c = \frac{W_{pc}}{2W_T}$$

Esta estimación sólo es válida si $f \gg f_c$, es decir, si hay una potencia transmitida apreciable, ya que si no fuera así obtendríamos una atenuación muy grande.

En la figura (4.14) vemos la evolución con la frecuencia de la constante de atenuación debida a los conductores en los modos TE, siendo la (a) la habitual y la (b) una evolución que se da en algunos modos y guías particulares, por ejemplo en la guía circular el modo TE_{01} .

En los modos TM la evolución es la misma que el caso habitual de los modos TE donde

$$f|_{\alpha_{min}} = \sqrt{3}f_c$$

es fija para todos los modos TM. No hay caso especial en los modos TM.

Si se aumenta la sección transversal de la guía disminuye la atenuación debida a los conductores, aunque se disipe más potencia en ellos. Esto es porque W_{pc} varía con el perímetro de la sección transversal, mientras que W_T lo hace con el área, así que la relación W_{pc}/W_T decrece al aumentar las dimensiones.

4.4.2 Guía rectangular

Buscamos la constante de atenuación debida a los conductores para el modo TE_{10} de la guía rectangular:

$$W_T = \frac{ab}{4\eta} |E_0|^2 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2}$$

Donde $|E_0| = \frac{\omega\mu}{\pi/a} |P|$.

El campo magnético tiene las siguientes componentes:

$$H_z = P \cos \frac{\pi}{a} x e^{-\gamma z}$$

$$H_x = \frac{\gamma}{\pi/a} P \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x e^{-\gamma z}$$

$$H_y = 0$$

Así que el producto

$$\begin{aligned}
 \vec{H} \cdot \vec{H}^* &= (\hat{z} \cdot H_z + \hat{x} \cdot H_x) \cdot (\hat{z} \cdot H_z^* + \hat{x} \cdot H_x^*) \\
 &= H_z H_z^* + H_x H_x^* \\
 &= |P|^2 \cos^2 \frac{\pi}{a} x + \frac{\beta^2}{(\pi/a)^2} |P|^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x
 \end{aligned}$$

Como se tiene el mismo conductor en todas las caras, σ y δ no dependen del contorno, así que se pueden sacar de la integral para calcular W_{pc} y calculando sólo la integral:

$$\begin{aligned}
 \oint_c \vec{H} \cdot \vec{H}^* dl &= \int_{x=0}^{x=a} \vec{H} \cdot \vec{H}^* \Big|_{y=0} dx + \int_{x=0}^{x=a} \vec{H} \cdot \vec{H}^* \Big|_{y=b} dx \\
 &\quad + \int_{y=0}^{y=b} \vec{H} \cdot \vec{H}^* \Big|_{x=0} dy + \int_{y=0}^{y=b} \vec{H} \cdot \vec{H}^* \Big|_{x=a} dy \\
 &= 2 \int_{x=0}^{x=a} \vec{H} \cdot \vec{H}^* \Big| dx + 2 \int_{y=0}^{y=b} \vec{H} \cdot \vec{H}^* \Big| dy \\
 &= 2 |P|^2 \frac{a}{2} + 2 \frac{\beta^2}{(\pi/a)^2} |P|^2 \frac{a}{2} + 2 |P|^2 b \\
 &= 2 |P|^2 \left(\frac{a}{2} \left(1 + \frac{\beta^2}{(\pi/a)^2} \right) + b \right) \\
 &= |P|^2 \left(a \left(1 + \frac{\beta^2}{(\pi/a)^2} \right) + 2b \right)
 \end{aligned}$$

Por tanto, la potencia perdida en los conductores por unidad de longitud será

$$\begin{aligned}
 W_{pc} &= \frac{1}{2\sigma\delta} |P|^2 \left(a \left(1 + \frac{\beta^2}{(\pi/a)^2} \right) + 2b \right) \\
 &= \frac{1}{2\sigma\delta} |P|^2 \left(a \left(1 + \frac{\omega^2 \mu \varepsilon \left(1 - \left(\frac{f_{c10}}{f} \right)^2 \right)}{(\pi/a)^2} \right) + 2b \right)
 \end{aligned}$$

Dado que $(\pi/a)^2 = -\gamma_{c10}^2 = \omega_c^2 \mu \varepsilon$

$$W_{pc} = \frac{1}{2\sigma\delta} |P|^2 \left(a \left(1 + \left(\left(\frac{f}{f_c} \right)^2 - 1 \right) \right) + 2b \right) = \frac{1}{2\sigma\delta} |P|^2 \left(a \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 + 2b \right)$$

Por tanto, la constante de atenuación debida a los conductores nos queda, omitiendo los cálculos:

$$\boxed{\alpha_c = \frac{1}{\sigma\delta\eta} \frac{\left(\frac{f_{c10}}{f} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{a}{b}}{\frac{1}{2} a \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}}{f} \right)^2}}} \quad Np/m \quad (4.108)$$

Cuando sube mucho la frecuencia, esta constante de atenuación tiende a

$$\frac{1}{\sigma\delta\eta} \frac{1}{b}$$

donde la dependencia con la frecuencia está en la profundidad de penetración, es decir, que varía según \sqrt{f} .

Se debe alcanzar un **compromiso** al diseñar la guía:

- ▷ b alta para maximizar la potencia transmitida y reducir α_c
- ▷ $b \leq a/2$ para mantener el máximo ancho de banda monomodo

4.5 Varios modos propagándose por la guía

En el caso de que haya más de un modo propagándose por la estructura, ¿será la potencia total la suma de las potencias propagadas por cada modo? Sólo será así si los modos son ortogonales.

Suponiendo conductor perfecto en la superficie lateral, tenemos

$$\begin{aligned}
 W_T(z) &= \frac{1}{2} \Re e \iint_{S_t} (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot d\vec{S} \\
 &= \frac{1}{2} \Re e \iint_{S_t} ((\vec{E}_{t_1} + \vec{E}_{t_2}) \times (\vec{H}_{t_1}^* + \vec{H}_{t_2}^*)) \cdot \hat{z} dS \\
 &= \frac{1}{2} \Re e \iint_{S_t} (\vec{E}_{t_1} \times \vec{H}_{t_1}^*) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \Re e \iint_{S_t} (\vec{E}_{t_2} \times \vec{H}_{t_2}^*) \cdot d\vec{S} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \Re e \iint_{S_t} (\vec{E}_{t_1} \times \vec{H}_{t_2}^* + \vec{E}_{t_2} \times \vec{H}_{t_1}^*) \cdot d\vec{S} \\
 &= W_{T_1} + W_{T_2} + W_{T_{interaccion}}
 \end{aligned}$$

Serán ortogonales si $W_{T_{interaccion}} = 0$.

- ▷ Parejas de modos de distintas familias siempre son **ortogonales**. Esto es, parejas TE-TM, TE-TEM o TM-TEM son ortogonales.
- ▷ Parejas TE-TE o TM-TM son ortogonales si no son degenerados (es decir, no tienen la misma frecuencia de corte): $\gamma_{c_1}^2 \neq \gamma_{c_2}^2$
- ▷ Parejas TEM-TEM en general no son ortogonales, ya que siempre son degenerados (su frecuencia de corte es cero).
- ▷ Si son TE-TE o TM-TM degenerados, no hay criterio para ver si son ortogonales, por lo que hay que comprobarlo.

Aparte de estas consideraciones, para dos modos que no sean ortogonales se puede encontrar una pareja de modos que sea combinación lineal de los originales y que sean ortogonales, por lo que son **ortogonalizables**.

Recordemos que esto sólo es aplicable para conductor perfecto.

4.6 Cable coaxial

Vamos a analizar el cable coaxial para obtener la frecuencia de corte del primer modo superior. Esto nos sirve para no sobrepasar esa frecuencia y poder trabajar en monomodo con el TEM.

Consideramos el radio del conductor interior a y el del conductor exterior b . El primer modo superior es un TE, concretamente el TE_{11} , cuya frecuencia de corte se aproxima por

$$f_c \simeq \frac{c/\sqrt{\epsilon_r}}{\pi(a+b)} \quad (4.109)$$

Ahora escribimos las dimensiones en función de la frecuencia de corte:

$$a+b = \frac{c/\sqrt{\epsilon_r}}{f_c} \frac{1}{\pi}$$

Como $c/\sqrt{\epsilon_r}$ es la longitud de onda del medio que rellena el coaxial para una onda plana, tenemos la **dimensión característica del coaxial**: aquella que cumple que es aproximadamente $\lambda|_{f_c}/2$

$$2(a+b) = \lambda|_{f_c} \frac{2}{\pi} \simeq 0.6\lambda|_{f_c} \quad (4.110)$$

Con esto también se puede estimar la frecuencia de corte del modo superior como aquella para la que la dimensión característica es aproximadamente $\lambda/2$.

4.7 Guía circular

Ahora la sección transversal es un círculo, como vemos en la figura (4.15), donde a es el radio del círculo y será la dimensión que caracterice los modos de la guía.

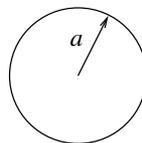


Figura 4.15: Esquema de la guía circular

En ella sólo se propagarán modos TE y TM, al haber sólo un conductor.

Para resolver el problema se usan coordenadas cilíndricas (r , φ y z), usándose para obtener los autovalores y autofunciones la técnica de separación de variables, igual que antes. Ahora será la función generadora de los modos dependiente de r y φ : $F(r, \varphi)$.

La variación con φ es trigonométrica, mientras que la variación con r es según las funciones de Bessel de primera especie.

No haremos el desarrollo, sino que daremos directamente los resultados.

El primer modo en propagarse será el TE_{11} , y su **frecuencia de corte** es

$$f_{cTE_{11}} = \frac{c/\sqrt{\epsilon_r}}{2\pi} \frac{1.841}{a} \quad (4.111)$$

Donde 1.841 es el primer cero de la derivada de la función de Bessel de primera especie y de primer orden.

En los TM ese número sería el cero de la función, no de la derivada.

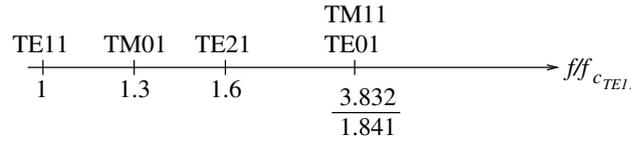


Figura 4.16: Diagrama de modos para la guía circular

La **dimensión característica** de la guía circular es

$$2a = \frac{c/\sqrt{\epsilon_r}}{f_c} \frac{1.841}{\pi} = 0.6\lambda|_{f_c} \tag{4.112}$$

En la figura (4.16) tenemos el diagrama de modos de la guía circular, en la que vemos que el ancho de banda monomodo es menor que el de la guía rectangular.

El modo más interesante para la guía circular es el TE_{01} , ya que la atenuación debida a los conductores disminuye con la frecuencia. Es uno de los casos particulares que ya vimos en el apartado de la atenuación debida a los conductores.

Hay que alterar las condiciones de contorno para poder anular los modos anteriores si queremos usar ese modo. Para ello, será necesario conocer la estructura de los campos.

Las líneas de corriente en los cuatro primeros modos (TE_{11} , TM_{01} , TE_{21} y TM_{11}) tienen componente longitudinal (son perpendiculares al campo magnético). Las vemos en la figura (4.17.a).

Para el TE_{01} son como las vemos en la figura (4.17.b).

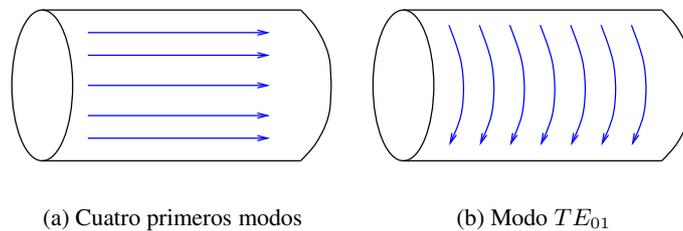


Figura 4.17: Líneas de corriente para los cuatro primeros modos y para el modo TE_{01}

Si queremos anular los cuatro primeros modos, cortamos las líneas de corriente, para lo cual podemos usar un hilo conductor arrollado sobre un cilindro dieléctrico.

Esto sin embargo no se usa ya, porque cuando se descubrió que se podía usar ya existía la fibra óptica, que permitía transmitir a grandes distancias sin apenas atenuación.

4.8 Guía ridge

También llamada guía **con reentrante**, se puede aplicar a guías circulares, rectangulares, coaxiales, etc. El reentrante consiste en una modificación de la estructura transversal de la guía que afecta a algunos modos y a otros no.

Su cometido es aumentar el ancho de banda monomodo. Esto se consigue disminuyendo la frecuencia de corte del modo dominante, manteniendo la del primer modo superior. Con esta técnica se pueden conseguir guías rectangulares con un ancho de banda de 5 : 1 sobre el 2 : 1 de la guía rectangular tradicional.

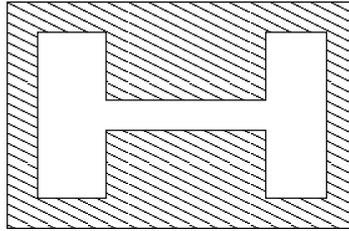


Figura 4.18: Guía rectangular con reentrantes

En la figura (4.18) vemos un ejemplo de guía rectangular con dos reentrantes, mientras que en la figura (4.19) tenemos las estructuras de campo para los dos primeros modos en una guía con un solo reentrante, y se puede observar que el reentrante afecta al modo TE_{10} mientras que no al TE_{20} .

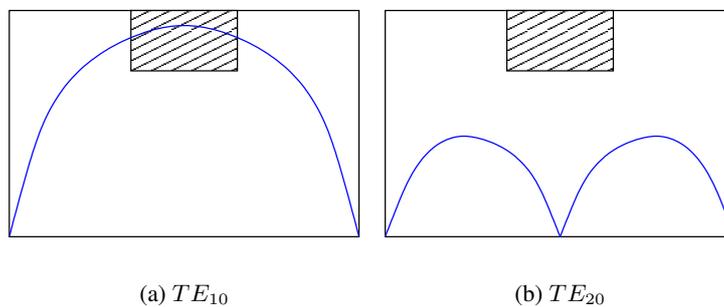


Figura 4.19: Estructuras de campo para los modos a) TE_{10} y b) TE_{20} y reentrante en la guía rectangular

En el modo TE_{10} , el campo se concentra en la zona central, por lo que con el reentrante se aproxima la guía a una guía biplaca.

Habrá que considerar en cualquier caso las pérdidas adicionales debidas a ese nuevo conductor que es el reentrante, por lo que se reduce la potencia que se puede transmitir por la guía.

Existen varias configuraciones para los reentrantes: puede haber 1, 2 o 4 reentrantes.

4.9 Condiciones de contorno en las tapas

El conocer las condiciones de contorno en los extremos de la guía es lo único que nos falta para conocer la solución única del problema.

En general, situaremos el generador a la izquierda y la carga a la derecha.

Un generador y una carga representan discontinuidades. También lo son los cambios en la sección transversal de la guía.

En cuanto a la propagación de los modos desde el generador a la carga, para una guía relativamente larga, se ignorarán los modos con coeficiente nulo y de los que tengan coeficiente no nulo sólo se tendrán en cuenta los que no estén al corte, ya que estos se atenúan rápidamente y no llegan a la carga (o llegan muy atenuados).

En un principio se supone que al conectar el generador existen todos los modos que soporta la estructura, tanto los que se propagan como los que están al corte. En la figura (4.20) están en trazo continuo los modos que se propagan, y en trazo a rayas los que están al corte.

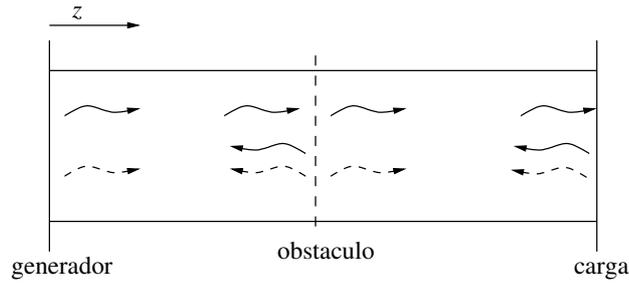


Figura 4.20: Condición de contorno en las tapas y en un obstáculo interior a la guía

Cuando el modo que se propaga se encuentra un obstáculo (suficientemente lejos del generador para que se hayan atenuado los modos al corte), se provoca la aparición de todos los modos que soporta la estructura, tanto en el sentido de la onda incidente como el de la onda reflejada.

Es decir, cada modo que se encuentra un obstáculo genera todos los modos que pueda soportar la estructura.

En la terminación ocurre lo mismo, pero sólo para los modos reflejados.

- La potencia del generador se reparte entre todos los modos
- Cuando se llega a un obstáculo parte de la potencia se disipa y parte genera los modos
- En cuanto a la carga, se da el mismo caso que para el obstáculo: parte de la potencia se disipa y la otra genera los modos

Hay que verificar que la longitud es grande, de forma que en el centro de cada zona que distingamos sólo queden modos en propagación y los modos en corte se hayan atenuado suficiente para no considerarlos.

4.9.1 Ejemplo

Consideremos una guía rectangular terminada en un cortocircuito ideal ($\sigma = \infty$) alimentada por un generador monocromático de frecuencia f_0 , que es mayor que la de corte del TE_{10} y menor que la del primer modo superior.

Si se supone una longitud L suficientemente larga de forma que no interactúen los modos al corte incidentes y reflejados, entonces en la zona central de la guía sólo existe modo TE_{10} .

Se ve esta situación en la figura (4.21), donde ahora la línea continua representa el modo TE_{10} mientras que la línea rayada los demás modos.

La condición de contorno en conductor perfecto nos impone

$$\vec{E}_{t_{total}} \Big|_{z=0} = 0$$

En las proximidades del cortocircuito tenemos

$$\vec{E}_{t_{total}}(z) = \underbrace{A^+ \vec{E}_{t_{TE_{10}}} e^{-\gamma_{10}z}}_{TE_{10} \text{ incidente}} + \underbrace{A^- \vec{E}_{t_{TE_{10}}} e^{\gamma_{10}z}}_{TE_{10} \text{ reflejado}} + \sum_m \sum_n A_{mn}^- \vec{E}_{t_{mn}} e^{\gamma_{mn}z}$$

El último término es la suma de todos los modos que soporta la estructura, tanto TE como TM, salvo el TE_{10} .

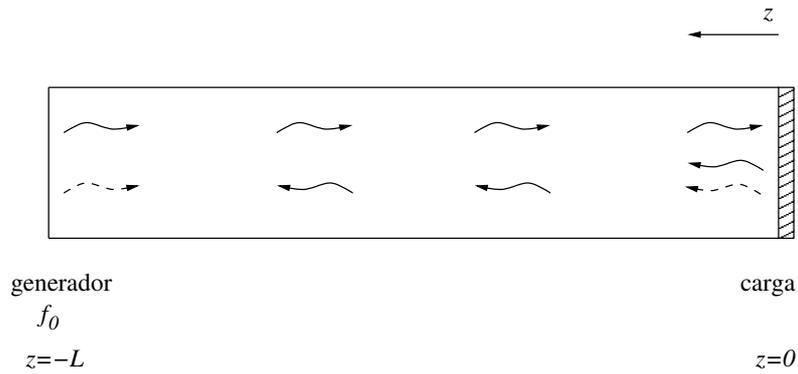


Figura 4.21: Ejemplo: guía rectangular con generador monocromático terminada en cortocircuito

En el cortocircuito:

$$\vec{E}_{t_{total}}(z=0) = (A^+ + A^-) \vec{E}_{t_{TE10}} + \sum_m \sum_n A_{mn}^- \vec{E}_{t_{mn}} = 0$$

En virtud de las propiedades de ortogonalidad de los modos:

$$A^+ + A^- = 0$$

$$A_{mn}^- = 0$$

Por tanto, el único modo reflejado es el incidente y

$$A^- = -A^+ \Rightarrow \rho = -1$$

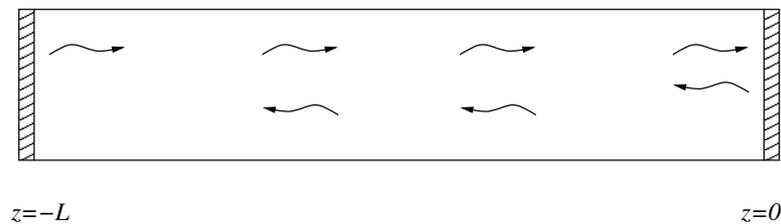


Figura 4.22: Guía rectangular cerrada por dos cortocircuitos de conductor perfecto

Si ahora consideramos la misma guía sin generador y cerrada por dos cortocircuitos en ambos extremos, como se ve en la figura (4.22), queremos saber si sería posible esa configuración de campo.

Para empezar, no existen modos al corte en el interior de la guía. Imponiendo la condición de contorno en $z = 0$ se obtiene

$$\vec{E}_{t_{total}} = A^+ \vec{E}_{t_{TE10}} (e^{-\gamma_{10}z} - e^{\gamma_{10}z}) = A^+ \vec{E}_{t_{TE10}} (-2 \sinh \gamma_{10}z)$$

La condición de contorno en $z = -L$ es la misma, ya que tenemos un conductor perfecto, y esta impone

$$\sinh \gamma_{10}L = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma_{10}L = (\alpha + j\beta)L = \alpha L + j\beta L \Rightarrow \sinh \gamma_{10}L &= \sinh(\alpha L) \cos(\beta L) \\ &+ j \cosh(\alpha L) \sin(\beta L) \end{aligned}$$

Esto nos lleva a

$$\sinh(\alpha L) \cos(\beta L) = 0$$

$$\cosh(\alpha L) \sin(\beta L) = 0$$

Dado que el coseno hiperbólico no se anula nunca, la segunda ecuación nos impone

$$\sin(\beta L) = 0$$

así que por otro lado $\cos(\beta L) \neq 0$, por lo que para la primera ecuación debe ser

$$\sinh \alpha L = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Por tanto, para que exista campo eléctrico en una cavidad de conductor perfecto debe cumplirse:

- ⤵ No debe haber pérdidas en el dieléctrico: $\alpha = 0$
- ⤵ Si $\beta = 0$, entonces $\sin \beta L = 0$, por lo que hay campo en la cavidad, lo que ocurre sólo si $f = f_{c_{TE10}}$
- ⤵ Si $\beta \neq 0$ ($f > f_{c_{TE10}}$) entonces debe ser

$$\beta L = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Lo que nos lleva a

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{TE10}} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_{TE10}} L = n\pi \Rightarrow \boxed{L = \frac{n\lambda_{TE10}}{2}}$$

En el caso ideal puede haber campo, ya que tenemos una **cavidad resonante**.



Figura 4.23: Ejemplo de guía rectangular cerrada por conductor perfecto a la que se conecta un generador y un medidor sin modificar las condiciones de contorno

Al tratarse de una cavidad resonante, se puede hablar de **frecuencias propias de la cavidad**, que son aquellas a las que puede existir campo sin que haya excitación.

Dado que en la realidad hay pérdidas, lo que pueden existir son oscilaciones forzadas, con una excitación que compense las pérdidas. Por ejemplo, un agujero en la guía que no modifique las condiciones de contorno y que permita proporcionar potencia a la estructura, como lo que está esquematizado en la figura (4.23).

Parámetros S

5.1 Introducción

Los parámetros S o de dispersión (la S es por *Scattering*) nos permiten caracterizar un modo TE o TM de una guía como si fuera un modo TEM de una línea de transmisión.

Lo que buscamos es caracterizar con parámetros los sistemas de microondas, pero sin usar tensiones y corrientes, ya que estas no tienen sentido físico en altas frecuencias, sino en función de ondas incidente y reflejada.

Los parámetros S son parámetros en el dominio de la frecuencia, es decir, números complejos. Por ello trabajaremos en régimen permanente sinusoidal.

En este tema se verán los siguientes conceptos:

- ⤷ Concepto de elemento de circuito a frecuencias de microondas
- ⤷ Definición de ondas de potencia
- ⤷ Caracterización de un monopuerto en términos de ondas de potencia
- ⤷ Caracterización de un bipuerto en términos de ondas de potencia
- ⤷ Propiedades de la matriz de parámetros S
- ⤷ Parámetros de transmisión en términos de ondas de potencia

5.2 Elemento de circuito a frecuencias de microondas

En Teoría de Circuitos teníamos los elementos de circuitos descritos como bipolos (o monopuertos), caracterizados por su **impedancia**:

$$Z = \frac{V}{I}$$

Por ejemplo, el bipolo de la figura (5.1).

Un elemento de circuito, desde el punto de vista electromagnético, es una región del espacio limitada por conductor perfecto en la que existe un campo electromagnético y que sólo se comunica con el exterior por uno o más sistemas de transmisión. Según cuantos sistemas de transmisión sean, se tratará de:

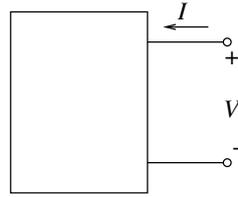


Figura 5.1: Elemento de circuito en Teoría de Circuitos

- ↪ 1 sistema: **monopuerto**
- ↪ 2 sistemas: **bipuerto**
- ↪ N sistemas: **multipuerto**

En Teoría de Circuitos se habla de terminales, mientras que en microondas se habla de **plano de referencia**. En la figura (5.2) el plano de referencia sería el formado por los puntos A y A' del sistema de transmisión, que bien puede ser una línea de transmisión en modo TEM o una guía monomodo.

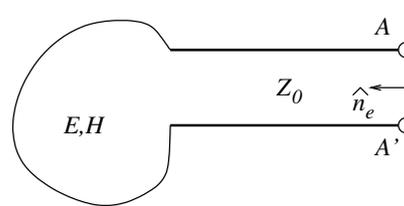


Figura 5.2: Elemento de circuito en frecuencias de microondas y plano de referencia (plano AA')

A priori consideraremos una línea de transmisión de impedancia característica Z_0 . En el caso de que hubiera 2 modos se podría ver el sistema como si tuviera 2 puertos.

Calculando el flujo del vector de Poynting que entra por la línea de transmisión se puede obtener la potencia disipada y transmitida al elemento de circuito.

Para campos monocromáticos podíamos definir la **potencia compleja** como

$$P = \frac{1}{2} \iint_{S_t} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} = \langle P_{dis} \rangle + j2\omega (\langle W_m \rangle - \langle W_e \rangle) \quad (5.1)$$

Donde:

- ↪ $d\vec{S} = \hat{n}_e \cdot dS$
- ↪ $\langle W_m \rangle$ es la densidad de potencia almacenada en el campo magnético
- ↪ $\langle W_e \rangle$ es la densidad de potencia almacenada en el campo eléctrico

Si consideramos la Teoría de Circuitos, entonces la potencia compleja es

$$P = \frac{1}{2} V \cdot I^* = \frac{|I|^2}{2} Z = \frac{|V|^2}{2} \frac{1}{Z^*} = \frac{1}{2} |V|^2 Y^* \quad (5.2)$$

Podemos despejar la impedancia en función de la potencia:

$$Z = \frac{P}{\frac{1}{2} |I|^2} = \frac{\langle P_{dis} \rangle}{\frac{1}{2} |I|^2} + j \frac{2\omega (\langle W_m \rangle - \langle W_e \rangle)}{\frac{1}{2} |I|^2} = R + jX \quad (5.3)$$

O bien la admitancia:

$$Y = \frac{P^*}{\frac{1}{2}|V|^2} = G + jB \quad (5.4)$$

A frecuencias de microondas no tienen sentido físico la tensión ni la corriente, por tanto tampoco la impedancia o admitancia.

En cambio, sí que tiene sentido físico la potencia. Por ello, se caracterizará el monopuerto con otras variables, que llamaremos **ondas de potencia**.

5.3 Ondas de potencia

Recordemos las definiciones de ondas de tensión y de corriente de la línea de transmisión:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma_0 z} + V_0^- e^{\gamma_0 z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} (V_0^+ e^{-\gamma_0 z} - V_0^- e^{\gamma_0 z})$$

Considerando el elemento de circuito de la figura (5.2), y teniendo en cuenta que la onda incidente irá en la dirección del vector \hat{n}_e , las ondas de tensión y corriente en el plano AA' serán

$$V_{AA'} = V(z=0) = V_0^+ + V_0^-$$

$$I_{AA'} = I(z=0) = \frac{1}{Z_0} (V_0^+ - V_0^-)$$

Se definen las siguientes **ondas de potencia**:

$$\boxed{a = \frac{V_0^+}{\sqrt{Z_0}} \quad b = \frac{V_0^-}{\sqrt{Z_0}}} \quad (5.5)$$

Consisten simplemente en una normalización distinta de las ondas de tensión. Sus dimensiones no son de potencia, sino de raíz de potencia, \sqrt{W} .

La potencia transmitida por la onda incidente será, en función de estas ondas de potencia:

$$W_{T_{oi}}(z=0) = \frac{1}{2} |a|^2$$

Mientras que la transmitida por la onda reflejada:

$$W_{T_{or}}(z=0) = \frac{1}{2} |b|^2$$

Es más cómodo usar a y b para los cálculos, ya que en la práctica nos interesa calcular potencias. Las ondas de tensión y corriente nos quedan

$$V_{AA'} = \sqrt{Z_0} (a + b) \quad (5.6)$$

$$I_{AA'} = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} (a - b) \quad (5.7)$$

Así, podemos extraer las ondas de potencia en función de las corrientes y tensiones terminales:

$$\boxed{a = \frac{V_{AA'} + Z_0 I_{AA'}}{2\sqrt{Z_0}} \quad b = \frac{V_{AA'} - Z_0 I_{AA'}}{2\sqrt{Z_0}}} \quad (5.8)$$

Estas son las expresiones generales para las ondas de potencia y sirven para cualquier elemento de circuito.

El concepto de ondas de potencia se puede usar con elementos concentrados de la misma forma, donde Z_0 sería una impedancia de referencia cualquiera, y representaría un simple cambio de variable.

Si en lugar de usar Z_0 , usamos otra impedancia de referencia $R_{ref} \neq Z_0$:

$$a = \frac{V_{AA'} + R_{ref}I_{AA'}}{2\sqrt{R_{ref}}} \quad b = \frac{V_{AA'} - R_{ref}I_{AA'}}{2\sqrt{R_{ref}}}$$

La potencia de entrada al sistema se puede escribir en función de las ondas de potencia, ya que

$$P_{in} = W_{T_{oi}}(z=0) - W_{T_{or}}(z=0) = \frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|b|^2 \quad (5.9)$$

Esta expresión es válida sea cual sea la R_{ref} que usemos.

Ahora V_0^+ y V_0^- no son como las que obtuvimos antes, sino que se tienen que sacar por otro lado. Lo hacemos, y para ello escribimos de nuevo las ondas de tensión y corriente en el plano AA' :

$$V_{AA'} = \sqrt{R_{ref}}(a+b) = V_0^+ + V_0^-$$

$$I_{AA'} = \frac{1}{\sqrt{R_{ref}}}(a-b) = \frac{1}{Z_0}(V_0^+ - V_0^-)$$

De donde se puede sacar V_0^+ y V_0^- :

$$V_0^+ = \frac{V_{AA'} + Z_0 I_{AA'}}{2} = \frac{a \left(\sqrt{R_{ref}} + \frac{Z_0}{\sqrt{R_{ref}}} \right) + b \left(\sqrt{R_{ref}} - \frac{Z_0}{\sqrt{R_{ref}}} \right)}{2} \quad (5.10)$$

Sólo si $R_{ref} = Z_0$ será $V_0^+ = \sqrt{Z_0}a$. Para V_0^- será igual:

$$V_0^- = \frac{V_{AA'} - Z_0 I_{AA'}}{2} = \frac{a \left(\sqrt{R_{ref}} - \frac{Z_0}{\sqrt{R_{ref}}} \right) + b \left(\sqrt{R_{ref}} + \frac{Z_0}{\sqrt{R_{ref}}} \right)}{2} \quad (5.11)$$

En resumen:

- Definimos las ondas de potencia como una normalización respecto Z_0 de V_0^+ y V_0^-
- Si cambiamos la impedancia de referencia, la definición anterior no nos sirve
- Las ondas de potencia no tienen sentido físico si $R_{ref} \neq Z_0$ o si no es una línea de transmisión lo que intentamos caracterizar (por ejemplo un resistor), pero nos siguen sirviendo para caracterizar los elementos

A partir de las ondas de potencia podemos definir el **coeficiente de reflexión** en la línea de transmisión:

$$S = \frac{b}{a} = \frac{V_0^-/\sqrt{Z_0}}{V_0^+/\sqrt{Z_0}} = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \rho \quad (5.12)$$

Cuando $R_{ref} = Z_0$ tiene sentido físico, pero no así cuando $R_{ref} \neq Z_0$, ya que sale un número distinto.

En general, si tenemos una impedancia de entrada a la línea Z_{in} y una impedancia de referencia R_{ref} , será

$$S = \frac{b}{a} = \frac{V_{AA'} - R_{ref}I_{AA'}}{V_{AA'} + R_{ref}I_{AA'}} = \frac{\frac{V}{I} - R_{ref}}{\frac{V}{I} + R_{ref}} = \frac{Z_{in} - R_{ref}}{Z_{in} + R_{ref}}$$

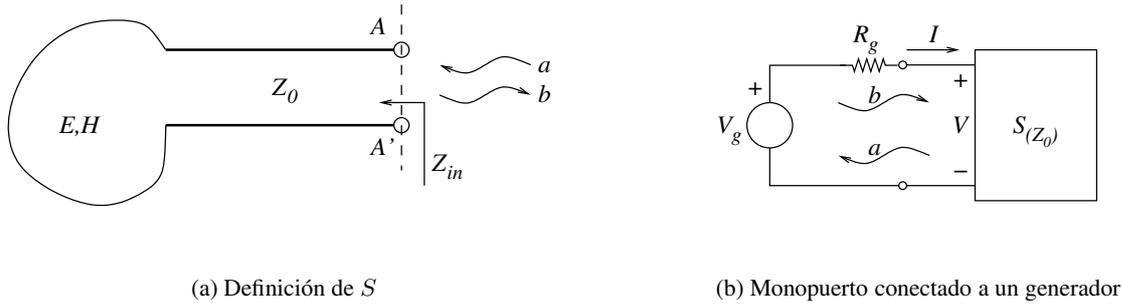


Figura 5.3: a) Definición del coeficiente de reflexión y b) monopuerto conectado a un generador

Sólo será $S = \rho$ si $R_{ref} = Z_0$.

Si tuviésemos un generador V_g con impedancia de salida R_g conectado a un monopuerto caracterizado por $S_{(Z_0)}$ (se especifica la R_{ref}) del coeficiente de reflexión,

$$V_g = R_g I + V$$

Donde V es la tensión de entrada al monopuerto y I la corriente de entrada al monopuerto. Se puede escribir en términos de ondas de potencia:

$$V_g = R_g \frac{1}{\sqrt{Z_0}} (a - b) + \sqrt{Z_0} (a + b)$$

Multiplicando todo por $\sqrt{Z_0}$

$$\sqrt{Z_0} V_g = R_g (a - b) + Z_0 (a + b) = a (R_g + Z_0) - b (R_g - Z_0)$$

Ahora podemos obtener la **condición de contorno** que impone el generador en función de ondas de potencia:

$$\boxed{a = V_g \frac{\sqrt{Z_0}}{R_g + Z_0} + b \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = a_g + b \rho_g} \tag{5.13}$$

Donde a_g es la **onda de potencia del generador**.

Con esto se caracteriza el generador. El monopuerto se caracteriza con

$$S = \frac{b}{a}$$

Por ejemplo, si el monopuerto es un resistor R_L

$$S = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \rho_L$$

$$b = a \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = a \rho_L$$

La potencia en el resistor es

$$P_L = \frac{1}{2} |a|^2 - \frac{1}{2} |b|^2 = \frac{1}{2} |a|^2 (1 - |S|^2)$$

Si $R_g = Z_0$ entonces $\rho_g = 0$, $a = a_g$ y $b = a_g \rho_L$, por lo que

$$\frac{1}{2} |a|^2 = \frac{1}{2} |a_g|^2 = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{Z_0}{4Z_0^2} = \frac{|V_g|^2}{8Z_0} = P_{dg}$$

Así que la potencia en el resistor queda

$$P_L = \frac{1}{2} |a_g|^2 (1 - |\rho_L|^2) = P_{dg} (1 - |S|^2)$$

Donde $|a_g|^2/2$ es la potencia que el generador entregaría a una carga Z_0 , y en este caso la carga es Z_0 .

Si además $R_g = R_L = Z_0$, entonces

$$P_L = P_{dg}$$

Por último, si $R_L = Z_0$ pero $R_g \neq Z_0$, entonces $\rho_g \neq 0$ y $\rho_L = 0$, por lo que $a = a_g + b\rho_g$ y $b = 0$. La potencia en la carga sería

$$P_L = \frac{1}{2} |a|^2 = \frac{1}{2} |a_g|^2$$

Un monopuerto sin pérdidas estará caracterizado por

$$S = e^{j\varphi} \Rightarrow |S| = 1$$

Es el equivalente a un bipolo pasivo no disipativo en la Teoría de Circuitos.

Si $|S| > 1$ se trata de un dispositivo activo, ya que entrega potencia, mientras que si $|S| < 1$ será un dispositivo con pérdidas (bipolo pasivo disipativo).

5.4 Caracterización de un bipuerto en términos de ondas de potencia

Ilustraremos esta caracterización con el sistema de la figura (5.4), donde tenemos un bipuerto al que se accede mediante dos líneas de transmisión de impedancias características Z_{01} y Z_{02} . En este caso existen los conceptos de ondas de tensión y corriente, ya que hay una línea de transmisión.

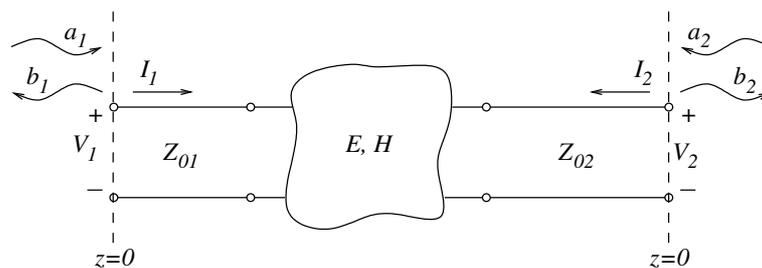


Figura 5.4: Bipuerto y ondas de potencia

Por tanto, podemos definir las tensiones y corrientes de entrada y salida del bipuerto:

↪ Entrada:

$$V_1 = V_{01}^+ + V_{01}^-$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_{01}} (V_{01}^+ - V_{01}^-)$$

↪ Salida:

$$V_2 = V_{02}^+ + V_{02}^-$$

$$I_2 = \frac{1}{Z_{02}} (V_{02}^+ - V_{02}^-)$$

Con lo que las ondas de potencia nos quedan (referenciadas a Z_{01} y Z_{02} para cada puerto):

↪ Entrada:

$$a_1 = \frac{V_{01}^+}{\sqrt{Z_{01}}}$$

$$b_1 = \frac{V_{01}^-}{\sqrt{Z_{01}}}$$

↪ Salida:

$$a_2 = \frac{V_{02}^+}{\sqrt{Z_{02}}}$$

$$b_2 = \frac{V_{02}^-}{\sqrt{Z_{02}}}$$

Los **parámetros S** expresan las ondas de potencia reflejadas en función de las ondas de potencia incidentes:

$$\begin{cases} b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2 \\ b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2 \end{cases} \quad (5.14)$$

Se pueden escribir también en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = [S] \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Ahora nos abstraemos del concepto de línea de transmisión y lo representamos todo como una caja negra, incluyendo los medios de transmisión con los que se accede al bipuerto, lo cual se ilustra en la figura (5.5).

↪ Para el puerto 1 tenemos

$$a_1 = \frac{V_1 + Z_{01}I_1}{2\sqrt{Z_{01}}} \quad b_1 = \frac{V_1 - Z_{01}I_1}{2\sqrt{Z_{01}}}$$

Donde ahora Z_{01} es una impedancia de referencia, con lo que estas son las expresiones generales de las ondas de potencia. No tendrán sentido físico si no hay línea de transmisión o si la impedancia característica de la línea es distinta de Z_{01} .

↪ Para el puerto 2

$$a_2 = \frac{V_2 + Z_{02}I_2}{2\sqrt{Z_{02}}} \quad b_2 = \frac{V_2 - Z_{02}I_2}{2\sqrt{Z_{02}}}$$

Estas son las relaciones que valen siempre, sea cual sea la impedancia de referencia y las impedancias características de las líneas.

Por tanto, podemos escribir las tensiones y corrientes de entrada y salida en función de estas ondas de potencia como sigue:

$$V_1 = \sqrt{Z_{01}} (a_1 + b_1) \quad I_1 = \frac{1}{\sqrt{Z_{01}}} (a_1 - b_1)$$

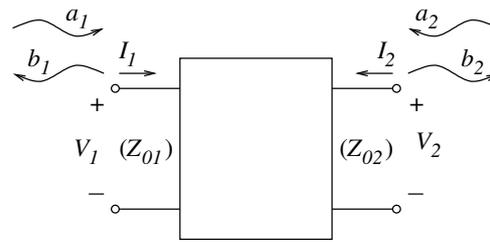


Figura 5.5: Bipuerto como caja negra

$$V_2 = \sqrt{Z_{02}} (a_2 + b_2) \quad I_2 = \frac{1}{\sqrt{Z_{02}}} (a_2 - b_2)$$

Es decir, que los parámetros S son sólo unos parámetros más que nos sirven para describir un bipuerto, como podrían ser los parámetros Z, H, Y, etc.

Existen los **parámetros S generalizados**, que se definen con respecto a impedancias de referencia complejas, pero no los vamos a usar, ya que nuestras impedancias de referencia serán siempre reales.

Las **potencias** de entrada y salida al bipuerto las podemos escribir también en función de estas ondas de potencia:

$$P_{in} = \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{2} |b_1|^2$$

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 - \frac{1}{2} |a_2|^2$$

Para el caso de la potencia de salida, la onda de potencia que sale hacia la carga es b_2 , al contrario que en el puerto de entrada, que es a_1 . La forma de obtener estas expresiones es a través de la definición de potencia:

$$P_{in} = \frac{1}{2} \Re (V_1 \cdot I_1^*)$$

$$P_L = -\frac{1}{2} \Re (V_2 \cdot I_2^*)$$

5.4.1 Definición de los parámetros S en el bipuerto

Usando el esquema de la figura (5.6) y a partir de las ecuaciones que definen los parámetros S, las cuales vimos antes, se puede obtener la definición de cada uno de los parámetros para el bipuerto.

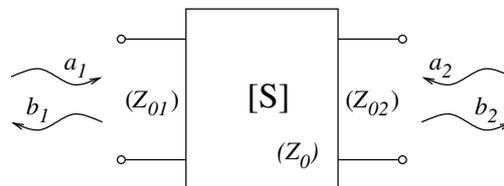


Figura 5.6: Esquema para definir los parámetros S del bipuerto

Para el s_{11} , se tiene

$$s_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

5.4.2 Ejemplos

Veamos un par de ejemplos sobre cálculo de matrices de parámetros S. El primero lo tenemos en la figura (5.8), donde tenemos un generador de impedancia interna Z_g y una carga de valor Z_L . La relación entre las ondas de potencia es

$$a_1 = a_g + \rho_g b_1$$

$$a_2 = \rho_L b_2$$

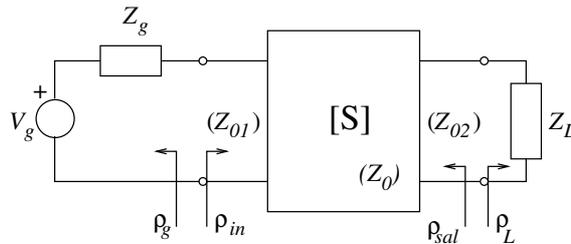


Figura 5.8: Ejemplo de cálculo de matriz de parámetros S

En este caso, $\rho_{in} \neq s_{11}$, ya que la impedancia con la que está cargada la salida del bipuerto no es Z_{02} , sino Z_L . Por tanto, el coeficiente de reflexión a la entrada para esta configuración es

$$\rho_{in} = \frac{b_1}{a_1} = s_{11} + s_{12} \frac{a_2}{a_1} = s_{11} + s_{12} \frac{\rho_L b_2}{a_1} = s_{11} + \frac{s_{12} s_{21} \rho_L}{1 - s_{22} \rho_L}$$

Donde la última igualdad viene de una de las ecuaciones de la definición de los parámetros S

$$\frac{b_2}{a_1} = s_{21} + s_{22} \frac{a_2}{a_1} = s_{21} + s_{22} \frac{\rho_L b_2}{a_1} \Rightarrow \frac{b_2}{a_1} = \frac{s_{21}}{1 - s_{22} \rho_L}$$

Si $\rho_L = 0$, entonces el coeficiente de reflexión sí coincide con el parámetro s_{11} , ya que en ese caso la carga sería $Z_L = Z_{02}$. También se daría ese caso si $s_{12} = 0$ o $s_{21} = 0$, en cuyo caso se tendría que no hay transmisión del puerto 2 al 1 o del 1 al 2, respectivamente.

En cuanto al coeficiente de reflexión a la salida, se obtiene desactivando la fuente independiente de la entrada, ya que el coeficiente de reflexión no sirve para caracterizar un sistema activo. Se obtiene igual que en el anterior:

$$\rho_{sal} = \frac{b_2}{a_2} = s_{21} \frac{a_1}{a_2} + s_{22} = s_{21} \frac{\rho_g b_1}{a_2} + s_{22}$$

Si usamos la otra ecuación de los parámetros S:

$$\frac{b_1}{a_2} = s_{11} \frac{a_1}{a_2} + s_{12} = s_{11} \frac{\rho_g b_1}{a_2} \Rightarrow \frac{b_1}{a_2} = \frac{s_{12}}{1 - \rho_g s_{11}}$$

Por tanto, el coeficiente de reflexión a la salida queda, finalmente

$$\rho_{sal} = s_{21} \rho_g \frac{s_{12}}{1 - \rho_g s_{11}} + s_{22}$$

De la misma forma que antes, el coeficiente de reflexión coincide con el parámetro s_{22} sólo si $\rho_g = 0$ ($Z_g = Z_{01}$) o si uno de los otros parámetros, s_{12} o s_{21} , es nulo.

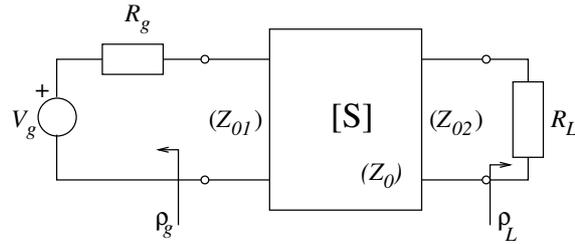


Figura 5.9: Ejemplo de cálculo de ganancia en potencia con los parámetros S

Ahora vemos otro ejemplo, el de la figura (5.9), donde vamos a calcular la ganancia en potencia del sistema:

$$G_p = \frac{P_L}{P_{in}}$$

Ahora vamos a tomar

$$Z_{01} = R_g \quad Z_{02} = R_L$$

Escribimos las ecuaciones de las ondas de potencia

$$b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2$$

$$b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2$$

$$a_1 = a_g + \rho_g b_1$$

$$a_2 = \rho_L b_2$$

El coeficiente de reflexión en el generador es nulo:

$$\rho_g = \frac{R_g - Z_{01}}{R_g + Z_{01}} = 0$$

ya que $R_g = Z_{01}$, por lo que

$$a_1 = a_g$$

Y la potencia que entrega el generador es la disponible:

$$\frac{1}{2} |a_g|^2 = P_{entgen} = P_{dg}$$

Lo mismo ocurre para la salida:

$$\rho_L = \frac{R_L - Z_{02}}{R_L + Z_{02}} = 0$$

Al ser $R_L = Z_{02}$.

Por tanto, la potencia que entra al bipuerto es

$$\begin{aligned} P_{in} &= \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{2} |b_1|^2 = \frac{1}{2} |a_g|^2 - \frac{1}{2} |s_{11}|^2 |a_g|^2 \\ &= \frac{1}{2} |a_g|^2 (1 - |s_{11}|^2) \\ &= P_{dg} (1 - |s_{11}|^2) \end{aligned}$$

Mientras que la potencia en la carga será

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2} |b_2|^2 - \frac{1}{2} |a_2|^2 = \frac{1}{2} |s_{21}|^2 |a_g|^2 \\ &= |s_{21}|^2 P_{dg} \end{aligned}$$

Por tanto, la ganancia en potencia es

$$G_p = \frac{P_L}{P_{in}} = \frac{|s_{21}|^2}{1 - |s_{11}|^2}$$

5.5 Propiedades de la matriz de parámetros S

5.5.1 Bipuerto sin pérdidas

En un bipuerto sin pérdidas, la matriz de parámetros S es unitaria, lo que significa que verifica

$$[S^*]^t \cdot [S] = I$$

Para el monopuerto ya lo habíamos visto:

$$S \cdot S^* = 1 \rightarrow |S| = 1$$

Para un bipuerto será

$$\begin{bmatrix} s_{11}^* & s_{21}^* \\ s_{12}^* & s_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que se deben cumplir las siguientes relaciones entre los parámetros:

$$s_{11} s_{11}^* + s_{21} s_{21}^* = |s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1$$

$$s_{11}^* s_{12} + s_{21}^* s_{22} = 0$$

$$s_{12}^* s_{11} + s_{22}^* s_{21} = 0$$

$$|s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 = 1$$

Lo que la primera relación significa es que parte de la potencia que incide en el puerto de entrada se refleja y parte se transmite al puerto de salida, pero nada se disipa dentro del bipuerto.

5.5.2 Reciprocidad

Si el bipuerto es recíproco, entonces los parámetros S cumplen

$$s_{ij} = s_{ji}$$

Por tanto, daría lo mismo excitar por un puerto o por el otro, siempre que se carguen con sus respectivas impedancias de referencia, en cuyo caso es

$$a_1 = a_2 \Leftrightarrow b_1 = b_2$$

En general, un bipuerto será recíproco si no es activo y no contiene medios anisótropos.

Hay un caso particular, que es cuando el bipuerto es **simétrico**, en cuyo caso además verifica

$$s_{ii} = s_{jj}$$

Por ejemplo, una línea de transmisión es un bipuerto simétrico, a menos que se rellene de un medio anisótropo.

5.5.3 Cambio de plano de referencia

Si tenemos la matriz de parámetros S de un bipuerto, a partir de ella podemos calcular la del mismo bipuerto con dos líneas de transmisión conectadas a ambos puertos con impedancias características Z_{01} y Z_{02} respectivamente.

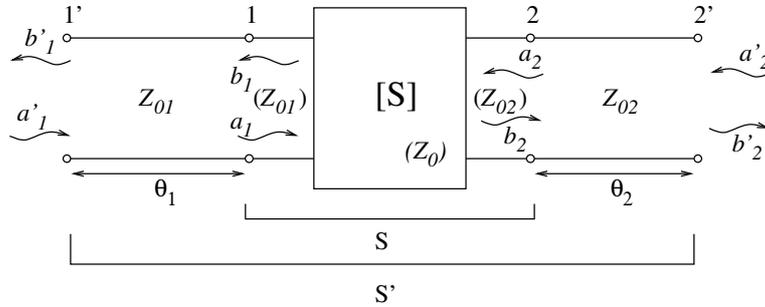


Figura 5.10: Cambio de plano de referencia

Vamos a usar el esquema de la figura (5.10), de forma que si θ_1 y θ_2 son las longitudes eléctricas de las líneas de transmisión, las ondas de potencia las podemos escribir como

$$\begin{aligned} a_1 &= a'_1 e^{-j\theta_1} & b'_1 &= b_1 e^{-j\theta_1} \\ a_2 &= a'_2 e^{-j\theta_2} & b'_2 &= b_2 e^{-j\theta_2} \end{aligned}$$

Ya que tienen sentido físico en la línea de transmisión. Sin embargo, esto sólo es cierto porque las impedancias características de las líneas de transmisión son iguales que las de referencia de los respectivos puertos.

Con esto, escribimos las ecuaciones matriciales del sistema completo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} &= [S'] \cdot \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-j\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-j\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}}_{S'} \cdot \begin{bmatrix} e^{-j\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así pues, podemos relacionar ambas matrices de parámetros S:

$$[S'] = \begin{bmatrix} e^{-j\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_2} \end{bmatrix} \cdot [S] \cdot \begin{bmatrix} e^{-j\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta_2} \end{bmatrix}$$

De forma general, para cada uno de los parámetros se cumple

$$\boxed{s'_{ij} = s_{ij} e^{-j(\theta_i + \theta_j)}} \tag{5.17}$$

En el bipuerto será

$$\begin{aligned} s'_{11} &= s_{11} e^{-j2\theta_1} & s'_{22} &= s_{22} e^{-j2\theta_2} \\ s'_{12} &= s_{12} e^{-j(\theta_1 + \theta_2)} & s'_{21} &= s_{21} e^{-j(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

5.5.4 Existencia de los parámetros S

Los parámetros S siempre existen, ya que nunca se definen con cortocircuitos ni circuitos abiertos, por lo que no se viola ninguna ley de interconexión ni relación constitutiva.

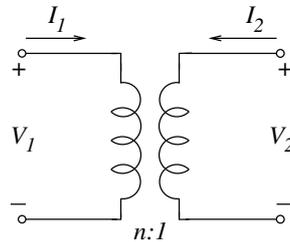


Figura 5.11: Transformador ideal

Tomamos como ejemplo el transformador ideal de la figura (5.11), cuyas relaciones constitutivas son

$$V_1 = nV_2 \quad I_1 = -\frac{1}{n}I_2$$

En este caso no se pueden definir parámetros impedancia, ya que al hacer $I_2 = 0$, se viola la segunda relación, porque no se puede establecer $I_1 = I_g$. Ocurre lo mismo para los parámetros admitancia.

Sí existen, sin embargo, los parámetros de transmisión (A , B , C y D):

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

También se pueden definir los parámetros S para este sistema. Hay varias formas de hacerlo:

- Definir las ondas de potencia:

$$\begin{aligned} \sqrt{Z_0}(a_1 + b_1) &= n\sqrt{Z_0}(a_2 + b_2) \\ \frac{1}{\sqrt{Z_0}}(a_1 - b_1) &= -\frac{1}{n\sqrt{Z_0}}(a_2 - b_2) \end{aligned}$$

Luego se calculan los parámetros con su definición a partir de estas ondas de potencia

- Usar las tensiones y corrientes de entrada y salida. Por ejemplo

$$s_{11} = \left. \frac{(V_1 - Z_0 I_1) / 2\sqrt{Z_0}}{(V_1 + Z_0 I_1) / 2\sqrt{Z_0}} \right|_{V_2 = -Z_0 I_2}$$

- Para s_{11} y s_{22} tenemos otra opción, cargando la salida con Z_0 :

$$s_{11} = \frac{n^2 Z_0 - Z_0}{n^2 Z_0 + Z_0} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

Y de la misma forma para s_{22} , pero cargando a la entrada con Z_0 :

$$s_{22} = \frac{Z_0/n^2 - Z_0}{Z_0/n^2 + Z_0} = \frac{1 - n^2}{1 + n^2}$$

5.6 Casos particulares

5.6.1 Bipuerto adaptado

Tenemos un bipuerto general (supondremos que las impedancias de referencia de ambos puertos son iguales a Z_0) caracterizado por la siguiente matriz de parámetros S:

$$\begin{bmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

Se observa que los parámetros s_{11} y s_{22} son nulos, lo que quiere decir que:

- ↪ $s_{11} = 0$: si se carga el bipuerto a la salida con la impedancia de referencia del puerto 2, Z_0 , el coeficiente de reflexión visto desde la entrada es nulo, lo que significa que **el bipuerto está adaptado a la entrada**.
- ↪ $s_{22} = 0$: si se carga el bipuerto a la entrada con la impedancia de referencia de dicho puerto, Z_0 , el coeficiente de reflexión visto desde la salida es nulo, así que **el bipuerto está adaptado a la salida**.

Esto quiere decir que cargando uno de los dos puertos con Z_0 , al incidir sobre el otro puerto, toda la potencia llega a la salida o se disipa en el bipuerto. No hay máxima transferencia de potencia, ya que en la salida puede reflejarse y llegar a la entrada.

Este caso por tanto es un bipuerto adaptado a la entrada y la salida, por lo que se le llama **bipuerto adaptado**. Además, es recíproco, y podemos ver el caso en el que no tiene pérdidas:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & s_{12}^* \\ s_{12}^* & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & s_{12} \\ s_{12} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} |s_{12}|^2 & 0 \\ 0 & |s_{12}|^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sólo se cumple si

$$|s_{12}| = 1$$

En este caso el bipuerto se puede decir que no hace nada, aunque en realidad puede desfasar la entrada.

Si $|s_{12}| < 1$ tiene pérdidas, por lo que se le llama **atenuador adaptado** (o atenuador por absorción).

Un ejemplo de implementación a baja frecuencia es una red en T o en Π con resistores.

5.6.2 Desfasador adaptado

Ahora consideremos un bipuerto (con impedancia de referencia Z_0 para ambos puertos) con la siguiente matriz de parámetros S:

$$\begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que $|s_{12}| = 1$, no tiene pérdidas, pero introduce un desfase. Como $s_{11} = s_{22} = 0$, está adaptado.

Un ejemplo de implementación es una línea de transmisión sin pérdidas con longitud eléctrica θ .

5.6.3 Aislador adaptado

Si tenemos un bipuerto caracterizado por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se trata de un bipuerto adaptado, ya que $s_{11} = s_{22} = 0$, pero no es recíproco (y por tanto no simétrico), y además tiene pérdidas, ya que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El comportamiento es simple: todo lo que incide en el puerto 1 pasa al 2, mientras que lo que se refleja o incide en el 2 se disipa.

Este tipo de bipuertos se usa entre generador y carga para proteger al generador de las reflexiones que se produzcan en la carga.

En cualquier caso será $\rho_{in} = 0$, por lo que sea cual sea la carga, el generador entregará toda su potencia disponible si $Z_g = Z_0$.

5.7 Matrices de transmisión en términos de ondas de potencia

Consideremos el caso de que tengamos varios bipuertos y queramos conectarlos en cascada. No es adecuado usar los parámetros S, sino otros que nos den las variables en un puerto en función de las del otro puerto, lo cual nos llevará multiplicar matrices para obtener la del sistema completo.

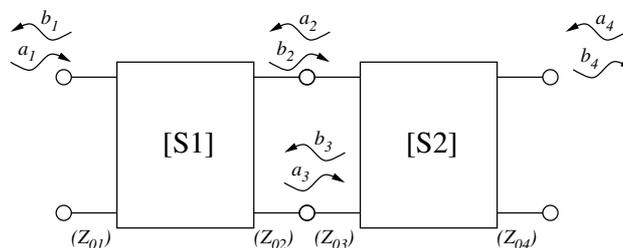


Figura 5.12: Conexión de dos bipuertos en cascada

Si consideramos la conexión de dos bipuertos, como en la figura (5.12), podemos relacionar a través de la matriz de parámetros de transmisión las variables del puerto 1 con las del puerto 2 (para el primer bipuerto):

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Es el equivalente en baja frecuencia a la matriz de parámetros A, B, C, D .

Debe darse **continuidad de las variables** en los puntos de interconexión:

$$Z_{02} = Z_{03} \Rightarrow b_2 = a_3 \quad a_2 = b_3$$

Sólo en este caso se podrá calcular la matriz de transmisión del conjunto como el producto de las matrices de ambos bipuertos.

Notas sobre unidades

Estamos acostumbrados a trabajar con potencias medidas en vatios (W). Normalmente se usan los **decibelios** (dB) y los **Neperios** (Np). Se definen de la siguiente forma:

$$dB = 10 \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$Np = \ln \frac{V_1}{V_2}$$

La constante de atenuación se suele medir en Np/m , por lo que se hace necesaria una relación entre neperios y decibelios:

$$\ln \frac{V_1}{V_2} = \ln \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} = x Np$$

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{2x}$$

$$10 \log \frac{P_1}{P_2} = 10 \log e^{2x} = 20x \log e$$

Por tanto, la relación es:

$$1 Np \simeq 8.686 dB$$

Bibliografía

- [1] D.M. Pozar, *Microwave Engineering*, 2nd Edition, 1998. John Wiley & Sons.
- [2] D.K. Cheng, *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*, 1993. Addison Wesley Iberoamericana.
- [3] Peter A. Rizzi, *Microwave Engineering. Passive Circuits*, 1988. Prentice-Hall Inc.